Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 1ere année,
Analyse (limites, continuité, dérivées, intégration)

T. Gallouët

November 19, 2020

Table des matières

Chapitre 1

Limites

1.1 Définition et propriétés

Dans tout ce document, on utilisera indifférement le terme “fonction” et le terme “application”. Une application (ou une fonction) f de D dans E est la donnée pour tout $x \in D$ de son image par f, notée $f(x)$. (Le domaine de définition de f est donc ici l'ensemble D.) lorsque nous parlerons d'une fonction de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$, le domaine de définition de f sera donc $\mathbb{R}$ tout entier.

Définition 1.1 (Limite finie en un point de $\mathbb{R}$) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a < c$ et $D \supset]b, a[\cup]a, c[$. On dit que l est limite de f en a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ t.q. :*

$$(x \in D,\, x \neq a,\, |x - a| \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - l| \leq \varepsilon)\,.$$

Proposition 1.1 (Unicité de la limite) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a < c$ et $D \supset]b, a[\cup]a, c[$. Soit $l, m \in \mathbb{R}$. On suppose que l est limite de f en a et que m est aussi limite de f en a. Alors, $l = m$.*

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Comme l est limite de f en a, il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Comme m est limite de f en a, il existe $\beta > 0$ t.q.

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x - a| \leq \beta \Rightarrow |f(x) - m| \leq \varepsilon.$$

On choisit maintenant $x = \min(a + \alpha, a + \beta, \frac{a+c}{2})$. On a alors $x \neq a$, $x \in D$ (car $a < x < c$), $|x - a| \leq \alpha$ et $|x - a| \leq \beta$. On a donc $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ et $|f(x) - m| \leq \varepsilon$. On en déduit $|l - m| \leq 2\varepsilon$.
On a ainsi montré que $|l - m| \leq 2\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit que $l = m$. En effet, si $l \neq m$ on a $|l - m| > 0$. On choisit alors $\varepsilon = \frac{|l-m|}{4}$ et on obtient

$$2\varepsilon = \frac{|l - m|}{2} \leq \varepsilon,$$

et donc $2 \leq 1$ (car $\varepsilon > 0$). Ce qui est absurde. On a donc bien, nécessairement, $l = m$. ■

Notation : Si l est limite de f en a, on note $l = \lim_{x \to a} f(x)$.

Proposition 1.2 (Caractérisation séquentielle de la limite) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a < c$ et $D \supset]b, a[\cup]a, c[$. Alors, l est la limite en a de f si et seulement si f transforme toute suite convergente vers a (et prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$) en suite convergente vers l, c'est-à-dire :*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}, \lim_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l.$$

Démonstration : On suppose tout d'abord que $l = \lim_{x\to a} f(x)$ et on va montrer que f transforme toute suite convergente vers a (et prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$) en suite convergente vers l.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$ t.q. $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$. On veut montrer que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$, c'est-à-dire (par définition de la limite d'une suite) que pout tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - l| \leq \varepsilon. \tag{1.1}$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. On cherche à montrer l'existence de n_0 donnant (1.1). On commence par remarquer que, comme $l = \lim_{x\to a} f(x)$, il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x \in D,\, x \neq a, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon. \tag{1.2}$$

Puis, comme $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| \leq \alpha.$$

On a donc pour $n \geq n_0$, $x_n \in D$, $x_n \neq a$ (car la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$) et $|x_n - a| \leq \alpha$. Ce qui donne, par (1.2), $|f(x_n) - l| \leq \varepsilon$. On a donc bien

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - l| \leq \varepsilon.$$

On a donc bien montré que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$. Ce qui termine la première partie de la démonstration (c'est-à-dire que $l = \lim_{x\to a} f(x)$ implique que f transforme toute suite convergente vers a (et prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$) en suite convergente vers l.)

On montre maintenant la réciproque. On suppose que f transforme toute suite convergente vers a (et prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$) en suite convergente vers l. On veut montrer que $l = \lim_{x\to a} f(x)$. Pour cela, on va raisonner par l'absurde. On suppose que l n'est pas la limite en a de f (la fonction f peut alors avoir une limite en a différente de l ou bien ne pas avoir de limite en a) et on va construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$, t.q. $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ et l n'est pas limite de $f(x_n)$ quand $n \to +\infty$ (en contradiction avec l'hypothèse).

Comme l n'est pas la limite en a de f, il existe $\varepsilon > 0$ t.q. pour tout $\alpha > 0$ il existe x t.q.

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x - a| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - l| > \varepsilon. \tag{1.3}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant $\alpha = \frac{1}{n+1}$ dans (1.3), on peut donc choisir un réel x_n t.q.

$$x_n \in D,\, x_n \neq a,\, |x_n - a| \leq \frac{1}{n+1} \text{ et } |f(x_n) - l| > \varepsilon. \tag{1.4}$$

On a ainsi construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ (car $|x_n - a| \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout n) et l n'est pas limite de $f(x_n)$ quand $n \to +\infty$ (car $|f(x_n) - l| > \varepsilon$ pour tout n). Ce qui est bien en contradiction avec l'hypothèse que f transforme toute suite convergente vers a (et prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$) en suite convergente vers l. Ce qui termine la démonstration de la proposition 1.2.

■

Remarque 1.1 Il est souvent pratique d'utiliser la caractérisation séquentielle de la limite. Soit, par exemple, une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ et a la borne supérieure de A. Soit enfin $m \in \mathbb{R}$. On suppose que

1. $f(x) \leq m$ pour tout $x \in A$,
2. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

On veut montrer que $f(a) \leq m$. Bien sûr, ceci est immédiat si $a \in A$ (et il suffit alors d'utiliser la première condition !) mais est un peu moins immédiat si $a \notin A$. Dans ce cas ($a \notin A$), on remarque qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A t.q. $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ (ceci est donné dans la proposition 1.3). Comme $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, on a donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$ et comme $f(x_n) \leq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit bien que $f(a) \leq m$.

Proposition 1.3 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *On suppose que A est majorée et on pose $a = \sup(A)$. Il existe alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A t.q. $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$.*
2. *On suppose que A n'est pas majorée. Il existe alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A t.q. $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.*

Démonstration : Cette démonstration est laissée en exercice (exercice 1.6). ■

Définition 1.2 (Limite finie à droite (ou à gauche) en un point de $\mathbb{R}$) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$.*

1. *On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ t.q. $a < c$ et $D \supset]a, c[$. On dit que si l est limite à droite de f en a si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ t.q. :*
$$x \in D,\ a < x \leq a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$
2. *On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a$ et $D \supset]b, a[$. On dit que l est limite à gauche de f en a si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ t.q. :*
$$x \in D,\ a - \alpha \leq x < a \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.4 (Unicité de la limite à droite (ou à gauche)) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.*

1. *On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ t.q. $a < c$ et $D \supset]a, c[$. Si f admet une limite (finie) à droite en a, cette limite est unique.*
2. *On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a$ et $D \supset]b, a[$. Si f admet une limite (finie) à gauche en a, cette limite est unique.*

Démonstration : La démonstration de l'unicité de la limite à droite est très voisine de la démonstration de l'unicité de la limite faite pour la proposition 1.1. On reprend ici cette démonstration. On suppose que l est limite à droite de f en a et que m est aussi limite à droite de f en a. Soit $\varepsilon > 0$. Comme l est limite à droite de f en a, il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x \in D, a < x \leq a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Comme m est limite à droite de f en a, il existe $\beta > 0$ t.q.

$$x \in D, a < x \leq a + \beta \Rightarrow |f(x) - m| \leq \varepsilon.$$

On choisit maintenant $x = \min(a + \alpha, a + \beta, \frac{a+c}{2})$. On a alors $x \in D$, $a < x \leq a + \alpha$ et $a < x \leq a + \beta$. On a donc $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ et $|f(x) - m| \leq \varepsilon$. On en déduit $|l - m| \leq 2\varepsilon$.

On a ainsi montré que $|l - m| \leq 2\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. Comme dans la proposition 1.1, on en déduit que $l = m$. Ce qui donne l'unicité de la limite à droite de f en a.

La démonstration de l'unicité de la limite à gauche est semblable et est laissée en exercice. ■

Notation : Si l est limite à droite de f en a, on note $l = \lim_{x\to a, x>a} f(x)$. Si l est limite à gauche de f en a, on note $l = \lim_{x\to a, x<a} f(x)$.

Proposition 1.5 (Limite=limite à droite et à gauche) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $b, c \in \mathbb{R}$ t.q. que $b < a < c$ et $D \supset]b, a[\cup]a, c[$. Alors, f admet l comme limite en a si et seulement si f admet l comme limite à droite et à gauche en a.*

Démonstration : Cette démonstration (dans le cas $D = \mathbb{R} \setminus \{a\}$) est laissé en exercice (exercice 1.11). ■

Proposition 1.6 (Caractérisation séquentielle de la limite à droite) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ t.q. $a < c$ et $D \supset]a, c[$. On a alors :*

1. *l est la limite à droite en a de f si et seulement si f transforme toute suite convergente vers a, prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et "supérieure" à a, en suite convergente vers l, c'est-à-dire :*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D,\ x_n > a \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l.$$

2. *l est la limite à droite en a de f si et seulement si f transforme toute suite convergente vers a, prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et décroissante, en suite convergente vers l, c'est-à-dire :*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D,\ a < x_{n+1} \leq x_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l.$$

Démonstration :
La démonstration du premier item est très voisine de celle faite pour la proposition 1.2. On reprend donc ici la démonstration de la proposition 1.2.

On suppose tout d'abord que $l = \lim_{x\to a, x>a} f(x)$ et on va montrer que f transforme toute suite convergente vers a, prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et "supérieure" à a, en suite convergente vers l.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ t.q. $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ et $a < x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On veut montrer que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$, c'est-à-dire (par définition de la limite d'une suite) que pout tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - l| \leq \varepsilon. \tag{1.5}$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. On cherche à montrer l'existence de n_0 donnant (1.5). On commence par remarquer que, comme $l = \lim_{x\to a, x>a} f(x)$, il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x \in D, a < x \leq a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon. \tag{1.6}$$

Puis, comme $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ (et que $x_n > a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow a < x_n \leq a + \alpha.$$

On a donc pour $n \geq n_0$, $x_n \in D$ (car la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans D) et $a < x_n \leq a + \alpha$. Ce qui donne, par (1.6), $|f(x_n) - l| \leq \varepsilon$. On a donc bien

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - l| \leq \varepsilon.$$

On a donc bien montré que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$. Ce qui termine la première partie de la démonstration (c'est-à-dire que $l = \lim_{x\to a} f(x)$ implique que f transforme toute suite convergente vers a, prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et "supérieure" à a, en suite convergente vers l.)

On montre maintenant la réciproque. On suppose que f transforme toute suite convergente vers a, prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et "supérieure" à a, en suite convergente vers l. On veut montrer que $l = \lim_{x\to a, x>a} f(x)$. Pour cela, on va raisonner par l'absurde. On suppose que l n'est pas la limite à droite en a de f (la fonction f peut alors avoir une limite à droite en a différente de l ou bien ne pas avoir de limite à droite en a) et on va construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$, "supérieure" à a, t.q. $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ et t.q. l n'est pas limite de $f(x_n)$ quand $n \to +\infty$ (en contradiction avec l'hypothèse).

Comme l n'est pas la limite à droite en a de f, il existe $\varepsilon > 0$ t.q. pour tout $\alpha > 0$ il existe x t.q.

$$x \in D,\ a < x \leq a + \alpha \text{ et } |f(x) - l| > \varepsilon. \tag{1.7}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant dans (1.7) $\alpha = \frac{1}{n+1}$, on peut donc choisir x_n t.q.

$$x_n \in D,\ a < x_n \leq a + \frac{1}{n+1} \text{ et } |f(x_n) - l| > \varepsilon.$$

on obtient ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$, "supérieure" à a, tendant vers a, quand $n \to +\infty$, et dont l'image par f ne tend vers l. Ce qui est bien en contradiction avec l'hypothèse que f transforme toute suite convergente vers a, prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et "supérieure" à a, en suite convergente vers l. Ce qui termine la démonstration du premier item de la proposition 1.6.

On montre maintenant le deuxième item. La première partie est immédiate. Si $l = \lim_{x\to a, x>a}$, la fonction f transforme toute suite convergente vers a, prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et décroissante, en suite convergente vers l (car une telle suite est nécessairement "supérieure" à a). Pour montrer la réciproque, on raisonne une nouvelle fois par l'absurde. On suppose que l n'est pas la limite à droite en a de f. La démonstration du premier item a permis de montrer qu'il existait $\varepsilon > 0$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$a < x_n,\ x_n \in D,\ |f(x_n) - l| > \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_n = a.$$

Il suffit de modifier légerement cette suite pour la rendre décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $y_n = \min(x_0, \ldots, x_n)$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie alors (en remarquant que y_n est l'un des x_p pour $p \leq n$ et que $a < y_n \leq x_n$)

$$a < y_{n+1} \leq y_n,\ y_n \in D,\ |f(y_n) - l| > \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} y_n = a.$$

la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend donc ses valeurs dans $D\setminus\{a\}$, est décroissante, converge vers a et la suite $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse. La démonstration de la proposition 1.6 est terminée. ■

Bien sûr, une caractérisation analogue est possible pour la limite à gauche. Dans le premier item, on remplace “supérieure” par “inférieure” et dans le deuxième item, on remplace “décroissante” par “croissante”, voir l'exercice 1.11.

Exemple 1.1 On prend ici $D =]0, \infty[$ et on cherche la limite à droite de f en 0 dans les deux exemples suivants :

1. Pour $x \in D$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$. Pour cet exemple, f n'admet pas de limite à droite en 0.
2. Pour $x \in D$, $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$. Pour cet exemple, $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 0$.

Définition 1.3 (Limite infinie en 1 point, limites en $\pm\infty$)
Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. *Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $D \supset]b, a[\cup]a, c[$ et $b < a < c$. On dit que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ si pour tout $A \in \mathbb{R}$ il existe $\alpha > 0$ t.q. :*
$$x \in D,\, x \neq a,\, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A.$$
2. *Soit $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ t.q. $D \supset]b, +\infty[$. On dit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ t.q. :*
$$x \in D,\, x \geq M \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$
3. *On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ t.q. $D \supset]b, +\infty[$. On dit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si pour tout $A \in \mathbb{R}$ il existe $M > 0$ t.q. :*
$$x \in D,\, x \geq M \Rightarrow f(x) \geq A.$$

Bien sûr, des définitions analogues existent avec $-\infty$ au lieu de $+\infty$ et, dans le cas du premier item, il est aussi possible de définir des limites infinies à droite et à gauche. Il est suggéré d'écrire de telles définitions.

Exemple 1.2 On prend ici $D =]0, \infty[$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ pour $x \in D$. On a alors ;

1. $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = +\infty$,
2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1.2 Opérations sur les limites

Proposition 1.7 (Limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient)
Soit f, g deux applications de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a < c$ et $D \supset]b, a[\cup]a, c[$. Soit $l, m \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim_{x\to a} g(x) = m$. Alors :

1. $\lim_{x\to a}(f + g)(x) = l + m$,
2. $\lim_{x\to a} fg(x) = lm$,

3. *Si $m \neq 0$, il existe $\beta > 0$ t.q. $]a-\beta, a[\cup]a, a+\beta[\subset D$ et $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a-\beta, a[\cup]a, a+\beta[$ (de sorte que f/g est bien définie sur $]a-\beta, a[\cup]a, a+\beta[$) et on a :*

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{l}{m}.$$

Démonstration : Les items 1 et 3 sont laissés en exercice (exercice 1.12). On montre ici le deuxième item.
On veut montrer que $\lim_{x\to a} fg(x) = lm$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x-a| \leq \alpha \;\Rightarrow\; |fg(x) - lm| \leq \varepsilon. \tag{1.8}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche donc $\alpha > 0$ vérifiant (1.8). Pour $x \in D$, on rappelle que $fg(x) = f(x)g(x)$. On commence par remarquer que $fg(x) - lm = fg(x) - lg(x) + lg(x) - lm$, de sorte que

$$|fg(x) - lm| \leq |f(x) - l||g(x)| + |l||g(x) - m|. \tag{1.9}$$

Comme $\lim_{x\to a} g(x) = m$, il existe $\alpha_1 > 0$ t.q.

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x-a| \leq \alpha_1 \;\Rightarrow\; |g(x) - m| \leq \frac{\varepsilon}{2(|l|+1)},$$

de sorte que

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x-a| \leq \alpha_1 \;\Rightarrow\; |l||g(x) - m| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.10}$$

Il existe aussi $a_2 > 0$ t.q.

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x-a| \leq \alpha_2 \;\Rightarrow\; |g(x) - m| \leq 1 \;\Rightarrow\; |g(x)| \leq |m| + 1,$$

de sorte que

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x-a| \leq \alpha_2 \;\Rightarrow\; |f(x) - l||g(x)| \leq |f(x) - l|(|m| + 1). \tag{1.11}$$

Enfin, comme $\lim_{x\to a} f(x) = l$, il existe $\alpha_3 > 0$ t.q.

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x-a| \leq \alpha_3 \;\Rightarrow\; |f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2(|m|+1)}. \tag{1.12}$$

On pose maintenant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) > 0$ et on obtient, grâce aux inégalités (1.9)-(1.12),

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x-a| \leq \alpha \;\Rightarrow\; |fg(x) - lm| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ce qui est (1.8) et conclut la démonstration. ■

Des résultats analogues à ceux donnés dans la proposition 1.7 sont possibles si $l = \pm\infty$ et (ou) si $m = \pm\infty$.

Proposition 1.8 (passage à limite dans une inégalité) *Soit f, g deux applications de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $D \supset]b, a[\cup]a, c[$ avec $b < a < c$. Soit $l, m \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim_{x\to a} g(x) = m$. On suppose que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in D$. On a alors $l \leq m$.*

Démonstration : On commence par montrer que $l - m \leq 2\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{x\to a} f(x) = l$, il existe $\alpha_1 > 0$ t.q.

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x - a| \leq \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon.$$

Comme $\lim_{x\to a} g(x) = m$, il existe $\alpha_2 > 0$ t.q.

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x - a| \leq \alpha_2 \Rightarrow |g(x) - m| \leq \varepsilon \Rightarrow m - \varepsilon \leq g(x) \leq m + \varepsilon.$$

On choisit maintenant $x = a + \alpha$ avec $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, \frac{a+c}{2})$ (de sorte que $\alpha \leq \alpha_1$, $\alpha \leq \alpha_2$, $x \neq a$ et $x \in D$). On a alors

$$l - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq m + \varepsilon.$$

On a donc bien montré que $l - m \leq 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

On en déduit que $l - m \leq 0$. En effet, si $l - m > 0$, on pose $\varepsilon = \frac{l-m}{4}$ et on obient $4\varepsilon = l - m \leq 2\varepsilon$, ce qui est absurde car $\varepsilon > 0$.

Finalement, on a bien montré que $l \leq m$. ■

Voici une conséquence immédiate de la proposition 1.8. Soit f, g, h trois applications de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $D \supset]b, a[\cup]a, c[$ avec $b < a < c$. Soit $l, m, k \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{x\to a} f(x) = l$, $\lim_{x\to a} g(x) = m$ et $\lim_{x\to a} h(x) = k$. On suppose que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in D$. On a alors $l \leq k \leq m$. Il suffit en effet d'appliquer la proposition 1.8 avec le couple f, h et avec le couple h, g. Il est aussi intéressant de remarquer que si $l = m$, il est inutile de supposer que h ait une limite en a. Le fait que h ait une limite en a (et que cette limite soit l) est alors une conséquence de l'encadrement de h entre f et g. Ceci est donné dans la proposition 1.9.

Proposition 1.9 (Limite par encadrement)
Soit f, g, h trois applications de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $D \supset]b, a[\cup]a, c[$ avec $b < a < c$. Soit $l \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = l$. On suppose que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in D$. La fonction h a alors une limite en a et cette limite est l. (c'est-à-dire $\lim_{x\to a} h(x) = l$.)

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{x\to a} f(x) = l$, il existe $\alpha_1 > 0$ t.q.

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x - a| \leq \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon.$$

Comme $\lim_{x\to a} g(x) = l$, il existe $\alpha_2 > 0$ t.q.

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x - a| \leq \alpha_2 \Rightarrow |g(x) - l| \leq \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon \leq g(x) \leq l + \varepsilon.$$

On pose alors $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ On a alors

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow l - \varepsilon \leq f(x) \leq h(x) \leq g(x) \leq l + \varepsilon,$$

et donc

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |h(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que la fonction h a une limite en a et que cette limite est l. ■

On donne maintenant un résultat (malheureusement un peu compliqué à énoncer) sur la composition de limites.

Proposition 1.10 (Composition de limites) *Soit f, g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = c$. On suppose aussi que $f(x) \neq b$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$. Alors, $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = c$*

DÉMONSTRATION : Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\alpha > 0$ t.q.

$$x \neq a,\ |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |g(f(x)) - c| \leq \varepsilon.$$

On commence par utiliser le fait que $\lim_{y\to b} g(y) = c$. Ceci donne l'existence de $\eta > 0$ t.q.

$$y \neq b,\ |y - b| \leq \eta \Rightarrow |g(y) - c| \leq \varepsilon. \tag{1.13}$$

Puis, comme $\lim_{x\to a} f(x) = b$, il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x \neq a,\ |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - b| \leq \eta.$$

Comme $f(x) \neq b$ (pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$), on a donc avec (1.13)

$$x \neq a,\ |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |g(f(x)) - c| \leq \varepsilon.$$

On a bien montré que $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = c$. ■

Remarque 1.2 Dans la proposition 1.10, nous avons pris (pour simplifier l'énoncé) des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Mais, cette proposition reste vraie si f est définie que $D \subset \mathbb{R}$ et g définie sur $E \subset \mathbb{R}$ en supposant qu'il existe $\gamma > 0$ t.q. $D \supset]a-\gamma, a[\cup]a, a+\gamma[$ et $E \supset]b-\gamma, b[\cup]b, +\gamma[$. Il faut alors commençer par remarquer que $g \circ f$ est définie sur ensemble qui contient $]a - \delta, a[\cup]a, a + \delta[$ pour un certain $\delta > 0$.

1.3 Fonctions monotones

Définition 1.4 (fonctions croissantes)
Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f une application de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$.

1. *On dit que f est croissante (ou monotone croissante) si :*

$$x, y \in]a, b[,\ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

2. *On dit que f est strictement croissante (ou strictement monotone croissante) si :*

$$x, y \in]a, b[,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

De manière analogue, on définit les fonctions décroissantes.

Proposition 1.11 (Limites d'une fonction monotone) *Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f une application croissante de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On a alors :*

1. *L'application f admet en tout point $c \in]a, b[$ une limite à droite et une limite à gauche, encadrant $f(c)$ (c'est-à-dire $\lim_{x\to c, x<c} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x\to c, x>c} f(x)$).*
2. *L'application f admet une limite (à gauche) finie ou égale à $+\infty$ en b, et l'application f admet une limite (à droite) finie ou égale à $-\infty$ en a.*

Démonstration : Soit $c \in]a,b[$. On va montrer que f admet une limite à gauche en c et que cette limite est inférieure ou égale à $f(c)$.

On pose $A = \{f(x),\ x < c\}$. L'ensemble A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par $f(c)$ (car f est croissante), il admet donc une borne supérieure, que l'on note l. On a $l \le f(c)$ (car $f(c)$ est un majorant de A). On montre maintenant que $l = \lim_{x\to c, x<c} f(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $l - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A (puisque l est le plus petit des majorants de A), il existe $d \in A$ t.q. $d > l - \varepsilon$. Il existe donc $x_0 < c$ t.q. $f(x_0) = d > l - \varepsilon$. On pose $\alpha = c - x_0$. On a donc $\alpha > 0$ et, grâce à la croissance de f,

$$x_0 \le x \Rightarrow f(x_0) \le f(x),$$

et donc, comme $x_0 = c - \alpha$ et $f(x_0) = d > l - \varepsilon$,

$$c - \alpha \le x \Rightarrow l - \varepsilon < f(x).$$

Par définition de l on a aussi

$$x < c \Rightarrow f(x) \le l.$$

On a donc, finalement,

$$c - \alpha \le x < c \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) \le l.$$

Ceci prouve que $l = \lim_{x\to c, x<c} f(x)$. On a donc bien montré que f admet une limite à gauche en c et que cette limite est inférieure ou égale à $f(c)$.

Un raisonnement semblable (non fait ici) permet de montrer que f admet une limite à droite en c et que cette limite est supérieure ou égale à $f(c)$.

Pour montrer que f admet une limite à gauche, finie ou égale à $+\infty$, en b, on pose $\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in]a,b[\}$.

Si $\mathrm{Im}(f)$ est majorée, on note β la borne supérieure de $\mathrm{Im}(f)$. La croissance de f permet alors de montrer que $\beta = \lim_{x\to b, x<b} f(x)$. Cette démonstration est laissée ici en exercice.

Si $\mathrm{Im}(f)$ n'est pas majorée, la croissance de f permet de montrer que $\lim_{x\to b, x<b} f(x) = +\infty$. Cette démonstration est aussi laissée ici en exercice.

Bien sûr, les démonstrations pour trouver la limite à droite en a sont très voisines. ■

Remarque 1.3 Soit $-\infty \le a < b \le +\infty$ et f une application croissante de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$. On pose $\alpha = \lim_{x\to a, x>a} f(x)$ et $\beta = \lim_{x\to b, x<b} f(x)$ (on rappelle que $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Si f n'a pas de saut (c'est-à-dire $\lim_{x\to c, x<c} f(x) = \lim_{x\to c, x>c} f(x)$ pour tout $c \in]a,b[$), l'application f est alors une bijection de $]a,b[$ dans $]\alpha,\beta[$. Nous démontrerons cette propriété au chapitre 2, section 2.4.

1.4 Exercices

1.4.1 Quelques rappels (Parties majorées et minorées, suites...)

Exercice 1.1

Soit a, $b \in \mathbb{R}$. Montrer les implications suivantes :

1. $(\forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

2. $(\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \leq b$.

3. $(\forall \varepsilon > 0,\ |a - b| < \varepsilon) \Rightarrow a = b$.

Pour les exercices suivants, on rappelle que si A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, il existe un nombre réel, noté $\sup(A)$, qui est le plus petit des majorants de A. De même, si A est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$, il existe un nombre réel, noté $\inf(A)$, qui est le plus grand des minorants de A.

Exercice 1.2

Soit A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. On pose $-A = \{-a,\ a \in A\}$. Montrer que $-A$ est une partie non vide minorée $\mathbb{R}$. Comparer $\inf(-A)$ et $\sup(A)$.

Exercice 1.3

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset B$. On suppose que B est majorée. Montrer que A est majorée et que $\sup(A) \leq \sup(B)$. Cette dernière inégalité est-elle nécessairement stricte si l'inclusion de A dans B est stricte ?

Exercice 1.4

Soit A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{a + b,\ a \in A \text{ et } b \in B\}$. Montrer que $A + B$ est majorée et comparer $\sup(A + B)$ et $\sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 1.5

1. Montrer que toute suite convergente dans $\mathbb{R}$ est bornée (c'est-à-dire majorée et minorée).

2. Montrer que toute suite croissante majorée est convergente dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.6

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que A est majorée et on pose $a = \sup(A)$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.

2. On suppose que A n'est pas majorée. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers l'infini.

Exercice 1.7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(u_n - u_{n-1})_{n\geq 1}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

2. Montrer que si la suite $(\sum_{k=1}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors u_n tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Montrer par un contre-exemple que la réciproque est fausse.

Exercice 1.8

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Si oui, le démontrer, sinon justifier en donnant un contre-exemple si nécessaire.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs et converge vers zéro, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

2. Le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite quelconque converge vers 0.
3. La suite $\{\sin n, n \in \mathbb{N}\}$ admet une sous-suite qui converge.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ou vers $-\ell$.
5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels telle que $\lim u_n = \ell$ avec $\ell > 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang.

Exercice 1.9 (Moyennes harmonique et arithmétique)

1. Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < a < b$, on a :

$$a < \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} < b.$$

2. Soit $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < u_0 < v_0$. On définit, par récurrence, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

   (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies et que u_n, $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes (dans $\mathbb{R}$).

   (b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$.

   (c) Vérifier que la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

   (d) Donner la limite commune aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.4.2 Limites

Exercice 1.10

Soit $l \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire à l'aide des quantificateurs les phrases suivantes :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers l quand n tend vers $+\infty$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
3. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers a.
4. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers $+\infty$.

.

Exercice 1.11 (Limite, limite à droite et limite à gauche)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Soit f une application définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f admet l comme limite en a si et seulement si f admet (en a) l comme limite à droite et comme limite à gauche.

2. Montrer que f admet l comme limite à gauche en a si et seulement si f vérifie la condition suivante : Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A,

$$x_n \uparrow a, \text{ quand } n \to +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l,$$

où "$x_n \uparrow a$ quand $n \to +\infty$" signifie "$a = \lim_{n\to+\infty} x_n$ et $x_{n+1} \geq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$".

3. Reprendre les questions 1 et 2 avec $l = \infty$ et avec $l = -\infty$.

Exercice 1.12 (Opérations sur les limites)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $I =]a, b[$. Soit f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ et $l, m \in \mathbb{R}$. On suppose que $l = \lim_{x\to a,\, x>a} f(x)$ et $m = \lim_{x\to a,\, x>a} g(x)$.

1. Montrer que $l + m = \lim_{x\to a,\, x>a}(f + g)(x)$.
2. On suppose que $m \neq 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ t.q. $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in J =]a, c[$. Montrer que $\frac{l}{m} = \lim_{x\to a,\, x>a} \frac{f(x)}{g(x)}$.
3. On suppose que $m = 0$, $l > 0$ et que $g(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Montrer que $\lim_{x\to a,\, x>a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.
4. On prend ici $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ et $g(x) = x$. Les applications fg et f/g (qui est bien définie sur I) ont-elles une limite à droite en 0 ?

Exercice 1.13 (Quelques exemples. . .)

Pour les exemples suivants, la fonction f est définie sur $I = \mathbb{R}$.

1. On définit f par $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?
2. On définit f par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)$ pour tout x. Quelle la limite de f en $+\infty$?
3. On définit f par $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x^2})}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?
4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z};\ n \leq x\}$. On définit f par $f(x) = x - \sqrt{x - E(x)}$ pour tout $x \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, L'application f a-t-elle une limite en n ? une limite à droite en n ? une limite à gauche en n ?

Exercice 1.14 (Autres exemples. . .)

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{2x^2-x-1}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite (à gauche) de f en 1 ?
2. $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?
3. Soit $a > 0$. On définit f par $f(x) = \frac{(1+x)^a}{x}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?
4. $f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?

Exercice 1.15 (Calcul de limites)

Calculer les limites suivantes (en les justifiant, mais sans "$\varepsilon - \delta$")

$$(a) \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}; \qquad (b) \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2+5x-4}{2x-1}; \qquad (c) \lim_{x\to+\frac{1}{2}} \frac{6x^2+5x-4}{2x-1}; \qquad (d) \lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 1.16 (Fonction périodique admettant une limite)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. on suppose qu'il existe $T > 0$ t.q. $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on dit alors que f est périodique de période T). On suppose de plus que f admet une limite finie, notée l, en $+\infty$. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 1.17 (Limite en $+\infty$)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 1.18 (Point fixe d'une application croissante)
Soit $I = [0,1]$ et f une application croissante de I dans I. On pose $A = \{x \in I, f(x) \le x\}$. Montrer que :

1. $A \neq \emptyset$,
2. $x \in A \Rightarrow f(x) \in A$.
3. A possède une borne inférieure $a \in I$.
4. $f(a) = a$.

(Toute application croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$ admet donc un point fixe.)

Exercice 1.19 (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, construire $x_\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - x_\varepsilon| \le \varepsilon$.

Exercice 1.20 (Moyenne de Cesàro)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = \frac{u_1+\ldots+u_n}{n}$.

1. Soit $l \in \mathbb{C}$. On suppose (dans cette question) que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$.
2. On suppose miantenant que $u_n \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ implique $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
   (b) On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}_+$, montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty} v_n = l \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$
3. (Généralisation) Soit (λ_n) une suite de nombres réels strictement positifs. Soit $l \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et que
   $$\lim_{n\to+\infty} (\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k) = +\infty.$$
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
   $$w_n = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k u_k}{\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k}.$$
   Montrer que $\lim_{n\to+\infty} w_n = l$.
4. Montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$
5. Soit $l \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = l$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = l$.

1.5 Exercices corrigés

Exercice 1.21 (Corrigé de l'exercice 1.7)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(u_n - u_{n-1})_{n\geq 1}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

   Comme u_n tend vers une limite finie ℓ lorsque $n \to +\infty$, on a aussi $u_{n-1} \to \ell$ lorsque $n \to +\infty$ et donc la différence $u_n - u_{n-1}$ tend vers 0.

2. Montrer que si la suite $(\sum_{k=1}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors u_n tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Montrer par un contre-exemple que la réciproque est fausse.

   Posons $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $v_n - v_{n-1} = u_n$ tend vers 0 lorque $n \to +\infty$ d'après la question précédente. La réciproque est fausse puisque la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

Exercice 1.22 (Corrigé de l'exercice 1.8)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Si oui, le démontrer, sinon justifier en donnant un contre-exemple si nécessaire.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs et converge vers zéro, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{2}{n}$ et $u_n = \frac{1}{n}$ si n est impair. La suite converge vers 0 mais n'est pas décroissante, même à partir d'un certain rang. En effet on a toujours $u_{2n} = \frac{1}{n}, u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}, u_{2n+2} = \frac{1}{n+1}$. Or $n < 2n+1$ et $n+1 < 2n+1$, donc $u_{2n} > u_{2n+1}$ et $u_{2n+1} < u_{2n+2}$.

2. Le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite quelconque converge vers 0.

   Evidemment non ! Prendre $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = n \ldots$

3. La suite $\{\sin n, n \in \mathbb{N}\}$ admet une sous-suite qui converge.

   Oui par Bolzano-Weierstrass, car $|\sin n| < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite est bornée.

4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ou vers $-\ell$.

   Evidemment non! Avec $u_n = (-1)^n$, On a $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 1$, donc la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, et pourtant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels telle que $\lim u_n = \ell$ avec $\ell > 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang.

   Oui, il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ dans la définition de la limite.

6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 \in [0, 1[$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ pour $n \geq 0$, converge vers 0.

   Faux : on démontre facilement par récurrence que $u_n = u_0^{\frac{1}{2^n}}$, et donc $u_n \to 1$ lorque $n \to +\infty$ si $u_0 \in]0, 1[$. Si $u_0 = 0$, dans ce cas bien sûr la suite est nulle et donc converge vers 0.

Exercice 1.23 (Corrigé de l'exercice 1.13)

Pour les exemples suivants, la fonction f est définie sur $I = \mathbb{R}$.

1. On définit f par $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?

corrigé

Pour $x > 0$, on a $f(x) = x + 1$. On a donc $\lim_{x \to 0, x > 0} f(x) = 1$. La fonction f a donc une limite à droite en 0.

Pour $x < 0$, on a $f(x) = x - 1$ (car $\sqrt{x^2} = -x$). On a donc $\lim_{x \to 0, x < 0} f(x) = -1$. La fonction f a donc une limite à gauche en 0.

Comme $\lim_{x \to 0, x > 0} f(x) \neq \lim_{x \to 0, x < 0} f(x)$, la fonction f n'a pas de limite en 0.

---

2. On définit f par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)$ pour tout x. Quelle la limite de f en $+\infty$?

corrigé

Pour $x > 0$, on a :

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1))(\sqrt{x^2 + x + 1} + (x + 1))}{\sqrt{x^2 + x + 1} + (x + 1)} = \frac{x^2 + x + 1 - (x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + (x + 1)},$$

et donc

$$f(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + (x + 1)} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}}.$$

On en déduit que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.

---

3. On définit f par $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x^2})}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?

corrigé

Pour $x > 0$, on a $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. La fonction sin est dérivable et sa dérivée est la fonction cos. La limite à droite en 0 de f est donc $\cos(0)$, c'est-à-dire $\lim_{x \to 0, x > 0} f(x) = 1$. La fonction f a donc une limite à droite en 0.

Pour $x < 0$, on a $f(x) = \frac{\sin(-x)}{x} = -\frac{\sin(x)}{x}$. On a donc $\lim_{x \to 0, x < 0} f(x) = -1$. La fonction f a donc une limite à gauche en 0.

Comme $\lim_{x \to 0, x > 0} f(x) \neq \lim_{x \to 0, x < 0} f(x)$, la fonction f n'a pas de limite en 0.

---

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z};\ n \leq x\}$. On définit f par $f(x) = x - \sqrt{x - E(x)}$ pour tout $x \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, L'application f a-t-elle une limite en n ? une limite à droite en n ? une limite à gauche en n ?

corrigé

Pour $x \in [n - 1, n[$, on a $E(x) = n - 1$ et donc $f(x) = x - \sqrt{x - n + 1}$. On en déduit que $\lim_{x \to n, x < n} f(x) = n - 1$. La fonction f a donc une limite à gauche en n.

Pour $x \in [n, n+1[$, on a $E(x) = n$ et donc $f(x) = x - \sqrt{x - n}$. On en déduit que $\lim_{x \to n, x > n} f(x) = n$. La fonction f a donc une limite à droite en n.

Comme $\lim_{x \to n, x > n} f(x) \neq \lim_{x \to n, x < n} f(x)$, la fonction f n'a pas de limite en n.

Exercice 1.24 (Corrigé de l'exercice 1.15)
Calculer les limites suivantes (en les justifiant, mais sans "$\varepsilon - \delta$")

$$(a) \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}; \qquad (b) \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2+5x-4}{2x-1}; \qquad (c) \lim_{x\to+\frac{1}{2}} \frac{6x^2+5x-4}{2x-1}; \qquad (d) \lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(a) On a $-\frac{1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ par le théorème des gendarmes.

(b) Pour $x > 0$, on a $\dfrac{6x^2+5x-4}{2x-1} = x\dfrac{6+\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}}{2-\frac{1}{x}}$, et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2+5x-4}{2x-1} = +\infty$.

(c) Comme $6x^2+5x-4 = (2x-1)(3x+4)$, on a pour $x \neq \frac{1}{2}$, on a $\dfrac{6x^2+5x-4}{2x-1} = 3x+4$ et donc

$$\frac{6x^2+5x-4}{2x-1} \to \frac{11}{2} \text{ lorsque } x \to \frac{1}{2}.$$

(d) On a $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln(1+x)\right)$. Or $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \to 1$ lorsque $x \to 0^+$ (car $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0). On a donc $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$ lorsque $x \to 0^+$.

Exercice 1.25 (Corrigé de l'exercice 1.16)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. on suppose qu'il existe $T > 0$ t.q. $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on dit alors que f est périodique de période T). On suppose de plus que f admet une limite finie, notée l, en $+\infty$. Montrer que f est une fonction constante.

corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$, on va montrer que $f(x) = l$. On commence par montrer, par récurrence sur n, que $f(x) = f(x+nT)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. En effet, pour $n = 1$, l'hypothèse sur f donne bien $f(x) = f(x+T)$. Puis, soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que $f(x) = f(x+nT)$. L'hypothèse sur f, utilisée avec le point $x+nT$, donne $f(x+nT) = f(x+nT+T)$. On en déduit que $f(x) = f(x+(n+1)T)$. On a bien ainsi montré, par récurrence sur n, que $f(x) = f(x+nT)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

On remarque maintenant que $\lim_{n\to+\infty}(x+nT) = +\infty$. Comme f admet l comme limite en $+\infty$, on a donc $\lim_{n\to+\infty} f(x+nT) = l$, et donc $f(x) = l$. Ce qui prouve que f est la fonction constante et égale à l.

Exercice 1.26 (Corrigé de l'exercice 1.17)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

corrigé

La fonction f n'a pas de limite en $+\infty$. En effet, supposons que f ait une limite en $+\infty$, notée l (avec $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$). Toute suite convergeant vers $+\infty$ est alors transformée en une suite ayant l pour limite. En prenant la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $x_n = 2n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $l = 0$. Puis, en prenant la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, on en déduit que $l = 1$. Ceci prouve que f n'a pas de limite en $+\infty$.

Une autre démonstration possible consiste à utiliser l'exercice 1.25.

Chapitre 2

Continuité

2.1 Définition et propriétés

Définition 2.1 (Continuité en un point) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in D$.*

1. *On dit que f est continue en a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. :*

$$x \in D,\ |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

2. *On dit que f est séquentiellement continue en a si f transforme toute suite convergente vers a en suite convergente vers $f(a)$, c'est-à-dire :*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D,\ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a).$$

Remarque 2.1 Sous les hypothèses de la définition 2.1 et si il existe $b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a < c$ et $D \supset]b,a[\cup]a,c[$, il est facile de voir que f est continue en a si et seulement si $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

Théorème 2.1 (Continuité versus continuité séquentielle) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in D$. Alors, f continue en a si et seulement si f est séquentiellement continue en a.*

Démonstration : La démonstration n'est pas détaillée ici. Il suffit essentiellement de reprendre celle de la proposition 1.2. ■

Remarque 2.2 La continuité en un point est une propriété locale. En effet, Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in D$. Soit $\gamma > 0$. On pose $\tilde{D} = D \cap]a-\gamma, a+\gamma[$. On appelle $\tilde{f}$ la restriction de f a $\tilde{D}$ (c'est-à-dire que $\tilde{f}$ est définie sur $\tilde{D}$ et $\tilde{f} = f$ sur $\tilde{D}$). Alors, f est continue en a si et seulement si $\tilde{f}$ est continue en a.

Définition 2.2 (Continuité) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. on dit que f est continue si f est continue en tout point de D.*

Remarque 2.3 Une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut être continue en tout point de $\mathbb{R}$, elle peut être continue en certains points de $\mathbb{R}$ et non continue en d'autres points. Enfin, elle peut aussi être continue en aucun point de $\mathbb{R}$. C'est le cas, par exemple, de la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

On donne maintenant la définition de la continuité uniforme, plus forte que la continuité.

Définition 2.3 (Continuité uniforme) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. on dit que f est uniformément continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. :*

$$x, y \in D,\ |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Exemple 2.1 On prend ici $D =]0, 1[$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in]0, 1[$. L'application f est continue (c'est-à-dire continue en tout point de D) mais n'est pas uniformément continue.

Proposition 2.1 (Somme, produit et quotient d'applications continues) *Soit f, g deux applications de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in D$. On suppose que f et g sont continues en a. Alors :*

1. *L'application $f + g$ est continue en a,*
2. *L'application fg est continue en a,*
3. *Il existe $\beta > 0$ t.q. $g(x) \neq 0$ pour $x \in D \cap]a - \beta, a + \beta[$ et f/g (qui est bien définie pour $x \in D \cap]a - \beta, a + \beta[$) est continue en a.*

Démonstration : Ici aussi, il suffit essentiellement de reprendre la démonstration de la proposition 1.7.

■

Proposition 2.2 (Continuité de la composée) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et g une application de $E \subset \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$. On suppose que $\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in D\} \subset E$ (de sorte que $g \circ f$ est définie sur D). Soit $a \in D$. On suppose que f est continue en a et g est continue en $f(a)$. Alors, $g \circ f$ est continue en a.*

Démonstration : Ici aussi, il suffit essentiellement de reprendre la démonstration de la proposition 1.10.

■

2.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2.2 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors, l'application f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ (c'est-à-dire que pour tout γ appartenant à l'intervalle dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ t.q. $f(c) = \gamma$).*

Démonstration : On distingue deux cas possibles.

Premier cas. On suppose que $f(a) \leq f(b)$. Soit $\gamma \in [f(a), f(b)]$. On pose $A = \{x \in [a, b] \text{ t.q. } f(x) \leq \gamma\}$. L'ensemble A est non vide (car il contient a) et est majoré par b. Il admet donc une borne supérieure que nous notons c. On a, bien sûr, $a \leq c \leq b$ ($a \in A$ et b est un majorant de A). On va montrer que $f(c) = \gamma$.

On commence par remarquer qu'il existe une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A t.q. $\lim_{n \to +\infty} c_n = c$ (voir, par exemple, l'exercice 1.6). Par continuité de f en c, on a donc $f(c) = \lim_{n \to +\infty} f(c_n)$ et donc, comme $f(c_n) \leq \gamma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit $f(c) \leq \gamma$.

On suppose maintenant que $f(c) < \gamma$ (et on va montrer que ceci est impossible). On a donc $c < b$ (car $f(b) \geq \gamma$). On pose $\varepsilon = \gamma - f(c) > 0$. Par continuité de f en c, il existe donc $\alpha > 0$ t.q.

$$x \in [a,b],\ |x-c| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(c)| \leq \varepsilon.$$

On a donc, en particulier, avec $\beta = \min(\alpha, b-c) > 0$,

$$c \leq x \leq c+\beta \Rightarrow f(x) \leq f(c) + \varepsilon = \gamma.$$

Ceci prouve que (par exemple) $c+\beta \in A$, en contradiction avec la définition de c (qui est $c = \sup A$). On a ainsi montré que $f(c)$ n'est pas strictement inférieur à γ. On a donc $f(c) = \gamma$.

Deuxième cas. On suppose que $f(a) > f(b)$. Soit $\gamma \in [f(b), f(a)]$. On montre alors qu'il existe $c \in [a,b]$ t.q. $f(c) = \gamma$ par un raisonnement semblable au précédent en prenant $A = \{x \in [a,b] \text{ t.q. } f(x) \geq \gamma\}$. Ce raisonnement n'est pas détaillé ici. ■

Remarque 2.4 Voici deux conséquences immédiates du théorème des valeurs intermédiaires.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\{f(x),\ x \in [a,b]\}$ contient l'intervalle dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$.

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application continue de I dans $\mathbb{R}$. Alors, f vérifie la "propriété des valeurs intermédiaires", c'est à dire : Pour tout $a, b \in I$, $a < b$, $\{f(x),\ x \in [a,b]\}$ contient l'intervalle dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$.

Remarque 2.5 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. La remarque précédente montre que la continuité de f implique que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. La réciproque est fausse, c'est-à-dire que le fait que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires n'implique pas la continuité de f. (La propriété des valeurs intermédiaires peut être présentée comme une sorte de continuité avec la notion d'ordre dans $\mathbb{R}$, alors que la continuité fait plutôt appel à la notion de distance.) Nous verrons au chapitre 3 que si f est dérivable de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$, alors f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires mais n'est pas toujours continue.

2.3 Fonction continue sur un intervalle fermé borné

Théorème 2.3 (fonction continue sur un compact) *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors, l'application f est bornée et atteint ses bornes. (c'est-à-dire qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ et $c, d \in [a,b]$ t.q. $f(c) = m$, $f(d) = M$ et, pour tout $x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$.)*

Démonstration :
Etape 1 On montre tout d'abord que f est majorée (c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in [a,b]\}$ est majorée). Pour cela, on raisonne par l'absurde. On suppose donc que f n'est pas majorée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme f n'est pas majorée, l'ensemble $A_n = \{x \in [a,b] \text{ t.q. } f(x) \geq n\}$ est non vide. Comme cet ensemble est majoré par b, il admet une borne supérieure, notée x_n, et on a $x_n \in [a,b]$. On sait aussi que x_n est limite d'une suite de point de A_n (voir l'exercice 1.6). Il existe donc une suite $(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ d'élément de A_n t.q. $\lim_{k\to+\infty} x_{n,k} = x_n$ (noter que n est ici fixé). Comme $x_{n,k} \in A_n$, on a $f(x_{n,k}) \geq n$ et comme f est continue en x_n, on a $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n,k}) = f(x_n)$. On en déduit que $f(x_n) \geq n$ (noter bien encore que n est ici fixé).

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (car $A_{n+1} \subset A_n$) et minorée (par a). Elle est donc convergente dans $\mathbb{R}$. On pose $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$. Comme $a \le x_n \le b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $a \le x \le b$, et comme f est continue en x, on a $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$, ce qui impossible car $f(x_n) \ge n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$).

On a donc montré que f est majorée. Un raisonnement similaire non fait ici permet de montrer que $f$est minorée.

Etape 2 On note $M = \sup\{\mathrm{Im}(f)\}$. On montre maintenant qu'il existe $d \in [a,b]$ t.q. $f(d) = M$. Pour cela, on utilise un raisonnement semblable à celui de la première étape.

Soit $n \in \mathbb{N}$, On pose $M_n = M - \frac{1}{n}$ et $B_n = \{x \in [a,b]$ t.q. $f(x) \ge M_n\}$. Comme M_n n'est pas un majorant de $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble B_n est non vide. Comme cet ensemble est majoré par b, il admet une borne supérieure, notée y_n, et on a $y_n \in [a,b]$. Comme y_n est limite d'une suite de point de B_n et que f est continue en y_n, on a donc $f(y_n) \ge M_n$. (On a raisonné ici comme à la première étape. Noter aussi que $f(y_n) \le M$ car $M = \sup\{\mathrm{Im}(f)\}$.)

La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (car $B_{n+1} \subset B_n$) et minorée (par a). Elle est donc convergente dans $\mathbb{R}$. On pose $d = \lim_{n\to+\infty} y_n$. Comme $a \le y_n \le b$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $a \le d \le b$ et, comme f est continue en d, on a $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = f(d)$. On en déduit que $f(d) = M$ en passant à la limite sur les inégalités $M_n = M - \frac{1}{n} \le f(y_n) \le M$.

Un raisonnement similaire non fait ici permet de montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ t.q. $f(c) = m = \inf(\mathrm{Im}(f))$.

■

Exemple 2.2 On prend ici $I =]0,1[$ et $f(x) = 1/x$ pour $x \in]0,1[$. Pour cet exemple, l'application f est non majorée et elle est minorée mais sa borne inférieure est non atteinte.

Le théorème 2.2 permet de montrer que l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle. Avec le théorème 2.3 , on a même que l'image par une application continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné. Ceci est donné dans le théorème 2.4.

Théorème 2.4 (Image d'un intervalle par une application continue)
Soit I intervalle (non vide) de $\mathbb{R}$ et f une application continue de I dans $\mathbb{R}$. On pose $\mathrm{Im}(f) = \{f(x), x \in I\}$. *Alors :*

1. *L'ensemble* $\mathrm{Im}(f)$ *est un intervalle. (Autrement dit, l'image par une application continue d'un intervalle est un intervalle.)*
2. *Si $I = [a,b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on a* $\mathrm{Im}(f) = [m, M]$ *avec $m, M \in \mathbb{R}$ (on peut noter que* $m = \inf(\mathrm{Im}(f))$ *et* $M = \sup(\mathrm{Im}(f))$*). (Autrement dit, l'image par une application continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.)*

Démonstration :
On montre tout d'abord le 1er item du théorème. Si $\mathrm{Im}(f)$ est minorée, on pose $\alpha = \inf(\mathrm{Im}(f))$. Si $\mathrm{Im}(f)$ n'est pas minorée, on pose $\alpha = -\infty$ (dans ce cas, on pose aussi $\inf(\mathrm{Im}(f)) = -\infty$). De même, si $\mathrm{Im}(f)$ est majorée, on pose $\beta = \sup(\mathrm{Im}(f))$. Si $\mathrm{Im}(f)$ n'est pas majorée, on pose $\beta = +\infty$ (dans ce cas, on pose aussi $\sup(\mathrm{Im}(f)) = +\infty$).

La définition de α et β donne donc immédiatement que $\mathrm{Im}(f) \subset [\alpha, \beta]$. Pour montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un intervalle, il suffit de montrer que $]\alpha, \beta[\subset \mathrm{Im}(f)$.

Soit $\gamma \in]\alpha, \beta[$. Comme γ n'est pas un minorant de $\mathrm{Im}(f)$, il existe $a \in I$ t.q. $f(a) < \gamma$. De même, Comme γ n'est pas un majorant de $\mathrm{Im}(f)$, il existe $b \in I$ t.q. $f(b) > \gamma$. le nombre γ est donc compris entre $f(a)$

et $f(b)$. Comme f est continue sur l'intervalle fermé borné dont les bornes sont a et b, le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.2) donne qu'il existe x entre a et b (et donc x dans I) t.q. $f(x) = \gamma$. On a donc bien montré que $]\alpha, \beta[\subset \mathrm{Im}(f)$ et donc que $\mathrm{Im}(f)$ est un intervalle (c'est un intervalle dont les bornes sont α et β).

On montre maintenant le deuxième item du théorème. Le théorème 2.3 montre qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ et $c, d \in [a, b]$ t.q. $f(c) = m$, $f(d) = M$ et que $\mathrm{Im}(f) \subset [m, M)$. Puis le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.2) montre que pour tout $\gamma \in [m, M]$, il existe x entre c et d (et donc $x \in [a, b]$) t.q. $f(x) = \gamma$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = [m, M]$. ∎

2.4 Fonction strictement monotone et continue

Théorème 2.5 *Soit I un intervalle (de $\mathbb{R}$) dont les extrémités sont a et b, avec $-\infty \le a < b \le +\infty$, et f une application strictement croissante, continue, de I dans $\mathbb{R}$. On pose $\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in I\}$, $\alpha = \inf(\mathrm{Im}(f))$ (avec $\inf(\mathrm{Im}(f)) = -\infty$ si $\mathrm{Im}(f)$ est non minorée), $\beta = \sup(\mathrm{Im}(f))$ (avec $\sup(\mathrm{Im}(f)) = +\infty$ si $\mathrm{Im}(f)$ est non majorée). Alors :*

1. *$\mathrm{Im}(f)$ est un intervalle dont les extrémités sont α et β. On note J cet intervalle.*
2. *Si $I =]a, b[$, on a alors $J =]\alpha, \beta[$.*
3. *L'application f est bijective de I dans J.*
4. *On note g la fonction réciproque de f (c'est-à-dire g définie de J dans I t.q. $g \circ f(x) = x$ pour tout $x \in I$ et $f \circ g(x) = x$ pour tout $x \in J$). L'application g est continue et strictement croissante (de J dans I).*

Démonstration :

1. Le théorème 2.4 donne que $\mathrm{Im}(f)$ est un intervalle. La définition de α et β donne alors que les extrémités de cet intervalle sont α et β.
2. Pour montrer que $\mathrm{Im}(f) =]\alpha, \beta[$ (lorsque $I =]a, b[$), il suffit de montrer que $\alpha \notin \mathrm{Im}(f)$ et $\beta \notin \mathrm{Im}(f)$. Pour cela, on raisonne par l'absurde. On suppose que $\alpha \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe alors $c \in]a, b[$ t.q. $f(c) = \alpha$ (et donc $\alpha \in \mathbb{R}$). Mais, en prenant $y \in]a, c[$, on a alors, grâce à la stricte croissance de f, $f(y) < f(c) = \alpha$, ce qui contradictoire avec la définition de α. Donc, $\alpha \notin \mathrm{Im}(f)$. De manière analogue, on peut montrer que $\beta \notin \mathrm{Im}(f)$. On a bien ainsi montré que $\mathrm{Im}(f) =]\alpha, \beta[$.
3. La fonction f est surjective de I dans J (car $J = \mathrm{Im}(f)$). Il reste à montrer que f est injective, mais ceci est une conséquence simple de la stricte croissance de f. En effet, soit $x, y \in I$, $x \neq y$. Si $x > y$, on a $f(x) > f(y)$. Si $x < y$, on a $f(x) < f(y)$. Dans les deux cas, on a donc $f(x) \neq f(y)$, ce qui prouve l'injectivité de f. L'application f est donc bien une bijection de I dans J.
4. On note g la fonction réciproque de f (g est donc définie de J dans I). On remarque tout d'abord que g est strictement croissante. En effet, soit $x, y \in J$, $x < y$. Si $g(x) \ge g(y)$, on a, par la croissance de f, $x = f(g(x)) \ge f(g(y)) = y$, ce qui est impossible. On a donc $g(x) < g(y)$, ce qui prouve que g est strictement croissante. Il reste à montrer que g est continue en tout point de J. Soit $\alpha < \gamma < \beta$. Comme g est croissante, g admet des limites à droite et à gauche en γ, notées $g_l(\gamma)$ et $g_r(\gamma)$, et ces limites encadrent $g(\gamma)$ (proposition 1.11). Plus précisément :
$$\lim_{x \to \gamma, x < \gamma} g(x) = \sup\{g(x), x < \gamma\} = g_l(\gamma) \le g(\gamma) \le g_r(\gamma) = \inf\{g(x), x > \gamma\} = \lim_{x \to \gamma, x > \gamma} g(x).$$

Mais, comme $\text{Im}(g)$ est un intervalle (car $\text{Im}(g) = I$) l'ensemble $[g_l(\gamma), g_r(\gamma)]$ est inclus dans $\text{Im}(g)$, ce qui n'est possible que si $g_l(\gamma) = g_r(\gamma)$. On a donc $g_l(\gamma) = g(\gamma) = g_r(\gamma)$, ce qui prouve que g est continue en γ. Un raisonnement analogue prouve que g est continue en α si $\alpha \in J$ (on considère alors la limite à droite de g en α et on montre qu'elle est égale à a) et que g est continue en β si $\beta \in J$ (on considère alors la limite à gauche de g en β et on montre qu'elle est égale à b). Ceci termine la démonstration de ce théorème.

■

Exemple 2.3 On prend dans cette exemple $I =]-\pi/2, \pi/2[$ et, pour $x \in I$, $f(x) = \tan(x)$. La fonction f est continue strictement croissante de I dans $\mathbb{R}$. On a $\alpha = \inf(\text{Im}f) = -\infty$ et $\beta = \sup(\text{Im}f) = +\infty$. Le théorème 2.5 donne alors que f est une bijection de I dans J avec $J = \mathbb{R}$ et que sa fonction réciproque est continue strictement croissante de J dans I. Cette fonction réciproque est la fonction "arctan".

2.5 Exercices

Exercice 2.1

Les assertions ci dessous sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si f est une fonction sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in]-\delta, \delta[$ alors $f(x) \in]f(0) - \frac{1}{n}, f(0) + \frac{1}{n}[$.
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui admet une limite à droite en 0 et une limite à gauche en 0, alors f est continue en 0.
3. Pour montrer que la fonction $f : x \mapsto 4x + 1$ est continue en un point a de $\mathbb{R}$, il suffit de prendre $\delta = 4\varepsilon$ dans la définition de la continuité.
4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en tout point de $\mathbb{Q}$, alors f est nulle.

Exercice 2.2 (Fonction continue, non nulle en un point)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et que $f(a) \neq 0$. Montrer que f est non nulle sur un intervalle ouvert contenant a.

Exercice 2.3 (Fonction lipschitzienne)

Soit $f\ : \mathbb{R}\ \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue (sur tout R).

Exercice 2.4

Pour quelle valeur de α la fonction f, définie ci-après, est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ \alpha \text{ si } x = 2. \end{cases}$$

Exercice 2.5 (Fonctions monotones)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $I =]a, b[$. Soit f une application strictement croissante de I dans $\mathbb{R}$. On pose $A = \{f(x),\ x \in I\}$, $\alpha = \inf A$ et $\beta = \sup A$. (Si A est non minorée, on pose $\inf A = -\infty$. Si A est non majorée, on pose $\sup A = +\infty$.)

1. Montrer que $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ (on pourra distinguer les cas $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha = -\infty$). Montrer que $\lim_{x\to b} f(x) = \beta$.

2. Soit $c \in I$. Montrer que f admet une limite à droite en c, notée $f_d(c)$, et une limite à gauche en c, notée $f_g(c)$. Montrer que $f_g(c) \le f(c) \le f_d(c)$.

3. On suppose que $f_d(c) = f_g(c)$ pour tout $c \in I$ (avec f_d et f_g définies à la question précédente). Montrer que f est continue et que f est bijective de $]a, b[$ dans $]\alpha, \beta[$.

Exercice 2.6 (Polynôme de degré impair)

Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré impair, s'annule en au moins un point.

Exercice 2.7 (Existence d'un maximum)

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Montrer que f admet un maximum (c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q., pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \le f(a)$).

Exercice 2.8 (Injectivité et continuité donne monotonie)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f\ [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est monotone. [Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]

Exercice 2.9 (Prolongement par continuité)

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|}.$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?

2. Calculer $\lim_{x\to-1} f(x)$ et $\lim_{x\to1} f(x)$.

3. Existe-t-il une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$ et qui est égale à f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$?

Exercice 2.10

Soit f et g deux fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, continues et t.q. $f(0) = g(1) = 0$ et $g(0) = f(1) = 1$. Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \exists x \in [0, 1],\ f(x) = \lambda g(x).$$

Exercice 2.11 (Valeur intermédiaire)

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, l'ensemble $\{s \in [0, 1] \text{ t.q. } f(s) = \frac{f(0)+f(t)}{2}\}$ est non vide.

   Pout $t \in [0, 1]$, on pose $\varphi(t) = \inf\{s \in [0, 1] \text{ t.q. } f(s) = \frac{f(0)+f(t)}{2}\}$.

2. Soit $t \in [0, 1]$, montrer que $\varphi(t) \in [0, 1]$ et que $f(\varphi(t)) = \frac{f(0)+f(t)}{2}$.

3. Montrer que si f est strictement croissante, l'application φ ainsi définie de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ est continue.

4. Donner un exemple de fonction f pour lequel la fonction φ n'est pas continue.

Exercice 2.12 (Fonction dont l'image est discrète)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue (c'est-à-dire continue en tout point de $\mathbb{R}$). On suppose que $f(x) \in \{0, 1\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante. [utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]

Exercice 2.13 (Continuité de "max" et "min")

1. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ et $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.
2. Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les applications $f \top g$ et $f \perp g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$(f \top g)(x) = \max\{f(x), g(x)\},\ (f \perp g)(x) = \min\{f(x), g(x)\},\ \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$
Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont continues en a. Montrer que $f \top g$ et $f \perp g$ sont continues en a.

Exercice 2.14 (Convexe implique continue)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est convexe, c'est à dire que $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$ pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

On pose $\alpha = f(1) - f(0)$, $\beta = f(0) - f(-1)$ et $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

1. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $\beta x \leq f(x) - f(0) \leq \alpha x$. [Utiliser le fait que $x = t1 + (1 - t)0$, avec $t = x$, et $0 = tx + (1 - t)(-1)$, avec $t = \frac{1}{1+x}$.]
2. Soit $x \in] - 1, 1[$. Montrer que $|f(x) - f(0)| \leq \gamma |x|$. En déduire que f est continue en 0.
3. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 2.15 (Borne supérieure atteinte)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ (on rappelle que $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$). On suppose que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Montrer que l'"ensemble $\{f(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$ est majoré et qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $f(a) = \sup\{f(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$.

Exercice 2.16 (Exercice sur les valeurs intermédiaires)

Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $f(0) = f(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. pour $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, on pose $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $x_0, x_1 \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ t.q. $g(x_0) \leq 0$ et $g(x_1) \geq 0$.
3. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ t.q. $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.

Exercice 2.17 (Prolongement par continuité)

Pour $x \in]0, 1[$, on pose $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$. Peut on prolonger f par continuité en 0 et en 1 ?

Exercice 2.18 (Point fixe)

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ et vérifiant
$$\forall x_1, x_2 \in [0, 1],\ |x_1 - x_2| \leq |f(x_1) - f(x_2)|\,.$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que $\{f(0), f(1)\} = \{0, 1\}$.
3. Montrer que f est surjective.
4. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 2.19 (Equation fonctionnelle)
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\text{Pour tout } x, y \in R_+,\ f(x+y) = f(x)f(y).$$

1. Montrer que f est à valeurs positives ou nulles.
2. Montrer que si $f(0) = 0$ alors f est identiquement nulle.

Dans ce qui suit on suppose que f n'est pas identiquement nulle.

3. Calculer $f(0)$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $f(nx)$ et $f(\frac{x}{n})$ en fonction de $f(x)$ et n.
5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et p, q deux entiers naturels strictement positifs. On pose $r = \frac{p}{q}$,En calculant $f(q(rx))$ de deux manières différentes, exprimer $f(rx)$ en fonction de $f(x)$ et r.
6. *Dans cette question on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$.*
   (a) Construire une suite (x_n) de réels strictement positifs convergeant vers 0 et tellle que $f(x_n) = 0$ pour tout $n \in N$.
   (b) Montrer que la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Dans ce qui suit on suppose que f est à valeurs strictement positives.

7. On suppose dans cette question que f est continue à droite sur $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
8. On suppose que f est continue à droite en 0, montrer que f est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}_+$ et conclure qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
9. On suppose qu'il existe deux réels A, B vérifiant $0 \leq A < B$ tels que f soit majorée sur $[A, B]$.
   (a) Montrer que sur $[0, B-A]$, f est minorée de borne inférieure strictement positive.
   (b) Montrer que f est continue à droite de 0.
   (c) Montrer qu'il existe un réel a tel que $f(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 2.20 (Croissance et continuité)
Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f une fonction croissante de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue si et seulement si $\mathrm{Im}(f)$ est un intervalle.

Exercice 2.21 (Une remarque pour un cours de thermodynamique)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose $g(x) = \frac{1}{x} f(\frac{1}{x})$. Montrer que f est convexe si et seulement si g est convexe.

Exercice 2.22 (Majoration...)

1. Montrer qu'il n'existe pas $C \in \mathbb{R}$ t.q.

$$t \ln(1+s) \leq t \ln(1+t) + s + C \text{ pour tout } t, s \in \mathbb{R}_+.$$

2. Soit $1 < q$. Montrer qu'il existe $C_q \in \mathbb{R}$ t.q.

$$t \ln(1+s) \leq t \ln(1+t) + s^q + C_q \text{ pour tout } t, s \in \mathbb{R}_+.$$

Exercice 2.23 (Existence pour un système non linéaire)

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $x, y \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\left\{ \begin{array}{l} -5x + 2\sin(x) + 2\cos(y) = 0, \\ 2\cos(x) + 2\sin(y) + 5y = 0. \end{array} \right. \tag{2.1}$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = -5x + 2\sin(x)$. Montrer que f est une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que le système (2.1) admet au moins une solution.

2.6 Exercices corrigés

Exercice 2.24 (Corrigé de l'exercice 2.1)

Les assertions ci dessous sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si f est une fonction sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in]-\delta, \delta[$ alors $f(x) \in]f(0) - \frac{1}{n}, f(0) + \frac{1}{n}[$.

   Oui, il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{n}$ dans la définition de la continuité de f en 0.

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui admet une limite à droite en 0 et une limite à gauche en 0, alors f est continue en 0.

   Non, par exemple la fonction f définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ admet 0 comme limite à gauche et à droite mais n'est pas continue.

3. Pour montrer que la fonction $f : x \mapsto 4x + 1$ est continue en un point a de $\mathbb{R}$, il suffit de prendre $\delta = 4\varepsilon$ dans la définition de la continuité.

   Non, il faut prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, car si $|x - a| < \frac{\varepsilon}{4}$, alors $f(x) - f(a) = 4|x - a| < \varepsilon$.

4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en tout point de $\mathbb{Q}$, alors f est nulle.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, comme Q est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$ lorsque $n \to +\infty$. Comme f est continue $f(x_n) \to f(x)$ lorsque $n \to +\infty$, et comme $f(x_n) = 0$ pour tout n, on en déduit que $f(x) = 0$.

Exercice 2.25 (Corrigé de l'exercice 2.2)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et que $f(a) \neq 0$. Montrer que f est non nulle sur un intervalle ouvert contenant a.

corrigé

On pose $\delta = |f(a)|$. Comme $\delta > 0$ et que f est continue en a, il existe $\gamma > 0$ t.q. :

$$x \in \mathbb{R}, |x-a| \leq \gamma \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \frac{\delta}{2} \Rightarrow f(a) - \frac{\delta}{2} \leq f(x) \leq f(a) + \frac{\delta}{2}.$$

Si $f(a) > 0$, on a donc $f(x) \geq \frac{f(a)}{2} > 0$, pour tout $x \in]a-\gamma, a+\gamma[$.

Si $f(a) < 0$, on a $f(x) \leq \frac{f(a)}{2} < 0$, pour tout $x \in]a-\gamma, a+\gamma[$.

Dans les deux cas ($f(a) > 0$ et $f(a) < 0$) on a donc :

$$x \in]a-\gamma, a+\gamma[\Rightarrow f(x) \neq 0.$$

ce qui repond à la question car $]a-\gamma, a+\gamma[$ est un intervalle ouvert contenant a.

Exercice 2.26 (Corrigé de l'exercice 2.3)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue (sur tout R).

corrigé

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\eta = \frac{\varepsilon}{k+1}$. On a donc $\eta > 0$ et :

$$x, y \in \mathbb{R}, |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq k\eta = \frac{k\varepsilon}{k+1} \leq \varepsilon.$$

Ceci prouve que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (et donc, en particulier, continue en tout point de $\mathbb{R}$).

Exercice 2.27 (Corrigé de l'exercice 2.4)

Pour quelle valeur de α la fonction f, définie ci-après, est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ \alpha \text{ si } x = 2. \end{cases}$$

corrigé

La fonction f est continue en tout point différent de 2 (car c'est le quotient de deux fonctions continues et le dénominateur en non nul).

le seul problème est donc la continuité en 2. On remarque que $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$ et donc, pour $x \neq 2$, $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2} = x^2 + 2x + 4$. Ceci permet de montrer que $\lim_{x \to 2} f(x) = 12$ et donc que f est continue en 2 si seulement si $\alpha = 12$.

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha = 12$.

Exercice 2.28 (Corrigé de l'exercice 2.6)

Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré impair, s'annule en au moins un point.

corrigé

Soit p un polynôme de degré impair et $n \in \mathbb{N}^\star$ le degré de ce polynôme. Il existe donc $a \neq 0$ et q polynôme de degré au plus égal à $n-1$ t.q.

$$p(x) = ax^n + q(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

et donc

$$p(x) = x^n(a + \frac{q(x)}{x^n}) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^\star.$$

Comme q est de degré strictement inférieur à n, on a $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{q(x)}{x^n} = 0$. Comme n est impair, on a donc :

$$\text{Si } a > 0, \lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty.$$

$$\text{Si } a < 0, \lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} p(x) = -\infty.$$

Dans les deux cas ($a > 0$ et $a < 0$) on a donc $\lim_{x\to+\infty} p(x)p(-x) = -\infty$. On en déduit, en particulier, qu'il existe $a > 0$ t.q. $p(a)p(-a) < 0$. Ceci montre que 0 est entre $p(a)$ et $p(-a)$. Comme p est une fonction continue sur $[-a, a]$, le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.2) permet d'affirmer qu'il existe $c \in [-a, a]$ t.q. $p(c) = 0$. Donc, le polynôme p s'annule en au moins un point.

Exercice 2.29 (Corrigé de l'exercice 2.7)

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Montrer que f admet un maximum (c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q., pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq f(a)$).

corrigé

On pose $\varepsilon = f(0)$. Comme $f(0) > 0$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, il existe $A \geq 0$ t.q. :

$$x \geq A \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq \varepsilon. \tag{2.2}$$

On remarque maintenant que la fonction f est continue sur l'intervalle $[0, A]$. Comme cet intervalle est fermé borné, on en déduit (théorème 2.3) que f est bornée sur $[0, A]$ et atteint ses bornes. Il existe donc $a \in [0, A]$ t.q. :

$$x \in [0, A] \Rightarrow f(x) \leq f(a).$$

Comme $0 \in [0, A]$, on a, en particulier $\varepsilon = f(0) \leq f(a)$. Avec (2.2), ceci donne $f(x) \leq \varepsilon \leq f(a)$ pour tout $x \geq A$. On a donc, finalement :

$$x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow f(x) \leq f(a).$$

Exercice 2.30 (Corrigé de l'exercice 2.8)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et f $[a, b] \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est monotone. [Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]

corrigé

On a $f(a) \neq f(b)$ (car f est injective et $a \neq b$). On suppose que $f(a) < f(b)$ et on va montrer que f est strictement croissante (si $f(a) > f(b)$, un raisonnement analogue donnerait que f est strictement décroissante).

On montre tout d'abord que f prend ses valeurs dans l'intervalle $[f(a), f(b)]$. Pour cela on raisonne par l'absurde. Soit $x \in]a, b[$. Si $f(x) \geq f(b)$, on a alors $f(b) \in [f(a), f(x)]$. Le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.2) appliqué à l'intervalle $[a, x]$ donne alors l'existence de $c \in [a, x]$ t.q. $f(c) = f(b)$. Ce qui impossible car f est injective. On a donc $f(x) < f(b)$. Un raisonnement analogue permet de montrer que $f(x) > f(a)$.

On montre maintenant que f est strictement croissante. Soit $a \leq x < y \leq b$. On sait déjà que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ et $f(a) \leq f(y) \leq f(b)$. Pour montrer que $f(x) < f(y)$, on raisonne encore par l'absurde. Si $f(x) \geq f(y)$, on a $f(x) \in [f(y), f(b)]$. Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à l'intervalle $[y, b]$ donne alors l'existence de $d \in [y, b]$ t.q. $f(d) = f(x)$. Comme $x < y$ on a $d \neq x$ et ceci est impossible car f est injective. On a donc $f(x) < f(y)$. On a bien montré que f est strictement croissante.

Exercice 2.31 (Corrigé de l'exercice 2.9)

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|}.$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?

   corrigé

   Oui ! La fonction f est continue en 0 car c'est le quotient de deux fonctions continues en 0 et que la fonction au dénominateur ne s'annule pas en 0.

   ---

2. Calculer $\lim_{x \to -1} f(x)$ et $\lim_{x \to 1} f(x)$.

   corrigé

   On remarque que $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x^2 - x - 2) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$.

   Pour $x \geq 0$, $x \neq 1$, on a donc $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - x} = (x + 1)(2 - x)$. On en déduit que $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

   Pour $x \leq 0$, $x \neq -1$, on a $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 + x} = (x - 1)(x - 2)$. On en déduit que $\lim_{x \to -1} f(x) = 6$.

   ---

3. Existe-t-il une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$ et qui est égale à f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$?

   corrigé

   Oui, une telle fonction g existe. Pour $x \geq 0$, on a $g(x) = (x + 1)(2 - x)$ et pour $x < 0$, on a $g(x) = (x - 1)(x - 2)$.

Exercice 2.32 (Corrigé de l'exercice 2.10)

Soit f et g deux fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, continues et t.q. $f(0) = g(1) = 0$ et $g(0) = f(1) = 1$. Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \ \exists x \in [0, 1], \ f(x) = \lambda g(x).$$

corrigé

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On définit la fonction h de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ en posant :

$$h(x) = f(x) - \lambda g(x) \text{ pour tout } x \in [0, 1].$$

La fonction h est continue sur $[0,1]$ (car f et g sont continues sur $[0,1]$). Comme $h(0)=f(0)-\lambda g(0)=-\lambda\leq 0$ et $h(1)=f(1)-\lambda g(1)=f(1)=1\geq 0$, le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.2) donne qu'il existe $x\in[0,1]$ t.q. $h(x)=0$, c'est-à-dire $f(x)=\lambda g(x)$. (Bien sûr, le point x trouvé dépend, en général, de λ.)

Exercice 2.33 (Corrigé de l'exercice 2.11)

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $t\in[0,1]$, l'ensemble $\{s\in[0,1]$ t.q. $f(s)=\frac{f(0)+f(t)}{2}\}$ est non vide.

corrigé

Soit $t\in[0,1]$. La fonction f est continue sur $[0,t]$ et $\frac{f(0)+f(t)}{2}$ est une valeur intermédiaire entre $f(0)$ et $f(t)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.2), il existe donc $s\in[0,t]$ (et donc $s\in[0,1]$) t.q. $f(s)=\frac{f(0)+f(t)}{2}$. Ceci prouve que l'ensemble $\{s\in[0,1]$ t.q. $f(s)=\frac{f(0)+f(t)}{2}\}$ est non vide.

Pout $t\in[0,1]$, on pose $\varphi(t)=\inf\{s\in[0,1]$ t.q. $f(s)=\frac{f(0)+f(t)}{2}\}$.

2. Soit $t\in[0,1]$, montrer que $\varphi(t)\in[0,1]$ et que $f(\varphi(t))=\frac{f(0)+f(t)}{2}$.

corrigé

On pose $A_t=\{s\in[0,1]$ t.q. $f(s)=\frac{f(0)+f(t)}{2}\}$. L'ensemble A_t est non vide (d'après la 1ere question) et minoré par 0. Il admet donc un borne inférieure, notée $\varphi(t)$, et $0\leq\varphi(t)$. D'autre part, comme $A_t\subset[0,1]$, on a aussi $\varphi(t)\leq 1$.

Pour montrer que $f(\varphi(t))=\frac{f(0)+f(t)}{2}$, on rappelle qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset A_t$ t.q. :

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\inf A_t=\varphi(t).$$

Comme $a_n\in A_t$, on a $f(a_n)=\frac{f(0)+f(t)}{2}$. En passant à limte sur cette égalité, la continuité de f en $\varphi(t)$ donne $f(\varphi(t))=\frac{f(0)+f(t)}{2}$.

---

3. Montrer que si f est strictement croissante, l'application φ ainsi définie de $[0,1]$ dans $[0,1]$ est continue.

corrigé

La fonction f étant strictement croissante, elle est bijective de $[0,1]$ dans son image. Comme elle est continue, son image est un intervalle (théorème 2.4) et sa fonction réciproque, notée g, est également continue (théorème 2.5). On a donc :

$$\varphi(t)=g\left(\frac{f(0)+f(t)}{2}\right)\text{ pour tout }t\in[0,1].$$

Ceci prouve que φ est continue car composée de fonctions continues.

---

4. Donner un exemple de fonction f pour lequel la fonction φ n'est pas continue.

corrigé

On prend $f(t) = 0$ pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et $f(t) = t - \frac{1}{2}$ pour $t \in]\frac{1}{2}, 1]$. La fonction f est bien continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et on remarque que $\varphi(t) = 0$ pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et que $\varphi(t) > \frac{1}{2}$ pour $t > \frac{1}{2}$. On en déduit que φ n'est pas continue en $\frac{1}{2}$.

Exercice 2.34 (Corrigé de l'exercice 2.12)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue (c'est-à-dire continue en tout point de $\mathbb{R}$). On suppose que $f(x) \in \{0, 1\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante. [utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]

corrigé

On raisonne par l'absurde. On suppose que f n'est pas constante. Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$. Comme f est continue sur l'intervalle fermé dont les bornes sont a et b et que (par exemple) $\frac{1}{2}$ est une valeur intermédiaire entre 0 et 1, le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.2) donne l'existence de c (entre a et b) t.q. $f(c) = \frac{1}{2}$, ce qui est impossible car $f(c) = 0$ ou 1.

Exercice 2.35 (Corrigé de l'exercice 2.13)

1. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ et $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

corrigé

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x \geq y$, on a alors $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = x = \max\{x, y\}$. On a aussi $\frac{1}{2}(x + y - |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y - x + y) = y = \min\{x, y\}$.

Si $x < y$, on est ramené au cas précédent en remarquant que $\max\{x, y\} = \max\{y, x\}$ et $\min\{x, y\} = \min\{y, x\}$ et $|x - y| = |y - x|$.

2. Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les applications $f \top g$ et $f \perp g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$(f \top g)(x) = \max\{f(x), g(x)\},\ (f \perp g)(x) = \min\{f(x), g(x)\},\ \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$
Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont continues en a. Montrer que $f \top g$ et $f \perp g$ sont continues en a.

corrigé

On note φ l'application (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) $s \mapsto |s|$. L'application φ est continue. La question 1 nous donne $f \top g = \frac{1}{2}(f + g + \varphi \circ (f - g))$ et $f \perp g = \frac{1}{2}(f + g - \varphi \circ (f - g))$. Comme les fonctions f et g sont continues en a, la fonction $\varphi \circ (f - g)$ est continue en a (par composition et différence de fonctions continues). On en déduit que $f \top g$ et $f \perp g$ sont continues en a.

Exercice 2.36 (Corrigé de l'exercice 2.14)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est convexe, c'est à dire que $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$ pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

On pose $\alpha = f(1) - f(0)$, $\beta = f(0) - f(-1)$ et $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

1. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que $\beta x \le f(x) - f(0) \le \alpha x$. [Utiliser le fait que $x = t1 + (1-t)0$, avec $t = x$, et $0 = tx + (1-t)(-1)$, avec $t = \frac{1}{1+x}$.]

corrigé

Comme $x = t1 + (1-t)0$, avec $t = x \in]0,1[$, la convexité de f donne :

$$f(x) \le tf(1) + (1-t)f(0) = f(0) + t(f(1) - f(0))$$

et donc :

$$f(x) - f(0) \le \alpha x.$$

On prend maintenant $t = \frac{1}{1+x}$, on a bien $tx + (1-t)(-1) = t(x+1) - 1 = 0$. Comme $\frac{1}{1+x} \in]0,1[$, la convexité de f donne $f(0) \le tf(x) + (1-t)f(-1)$ et donc :

$$tf(0) + (1-t)f(0)) \le tf(x) + (1-t)f(-1).$$

On en déduit :

$$t(f(0) - f(x)) \le (1-t)(f(-1) - f(0)) = -\beta(1-t).$$

Comme $(1-t) = \frac{x}{1+x} = tx$, on en déduit bien $f(0) - f(x) \le -\beta x$ c'est-à-dire :

$$\beta x \le f(x) - f(0).$$

---

2. Soit $x \in]-1,1[$. Montrer que $|f(x) - f(0)| \le \gamma |x|$. En déduire que f est continue en 0.

corrigé

Soit $x \in]0,1[$, la question 1 donne $|f(x) - f(0)| \le \max\{\alpha x, -\beta x\} \le \gamma x = \gamma |x|$.

On suppose maintenant que $x \in]-1,0[$. On raisonne de manière analogue à la question 1. On remarque d'abord que $x = t(-1) + (1-t)0$, avec $t = -x \in]0,1[$. la convexité de f donne donc $f(x) \le tf(-1) + (1-t)f(0) = f(0) - x(f(-1) - f(0))$ et donc :

$$f(x) - f(0) \le \beta x.$$

Avec $t = \frac{1}{1-x}$, on a $0 = tx + (1-t)(1)$. Comme $\frac{1}{1-x} \in]0,1[$, la convexité de f donne $f(0) \le tf(x) + (1-t)f(1)$, on en déduit $t(f(0) - f(x)) \le (1-t)(f(1) - f(0)) = (1-t)\alpha$. Enfin, comme $1 - t = \frac{-x}{1-x} = -xt$, on obtient :

$$f(0) - f(x) \le -\alpha x.$$

On a finalement $\alpha x \le f(x) - f(0) \le \beta x$ et on conclut, comme pour le cas $x \in]0,1[$, $|f(x) - f(0)| \le \max\{\beta x, -\alpha x\} \le \gamma |x|$.

Comme le cas $x = 0$ est trivial, on a bien démontré

$$|f(x) - f(0)| \le \gamma |x| \text{ pour tout } x \in]-1,1[. \tag{2.3}$$

De (2.3), on déduit facilement que f est continue en 0. En effet, soit $\varepsilon > 0$, On prend $\eta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{\gamma+1}\} > 0$, l'inégalité (2.3) donne alors :

$$|x - 0| \le \eta \Rightarrow |f(x) - f(0)| \le \varepsilon,$$

ce qui prouve bien la continuité de f en 0.

---

3. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

corrigé

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x + a)$. La fonction f est continue en a si (et seulement si) la fonction g est continue en 0. Pour montrer que g est continue en 0 (et donc que f est continue en a), il suffit de remarquer que g est convexe et d'appliquer la question précédente (à la fonction g au lieu de f). Il reste donc à montrer que g est convexe.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$, on a $g(tx+(1-t)y) = f(tx+(1-t)y+a) = f(t(x+a)+(1-t)(y+a)) \leq tf(x + a) + (1 - t)f(y + a) = tg(x) + (1 - t)g(y)$. Ceci prouve donc que g est convexe.

On a ainsi montré que f est continue en a.

Exercice 2.37 (Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI))

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe $x_2 \in [0, 1]$ tel que $f(x_2) = (x_2)^2$. [On pourra considérer la fonction $g(x) = f(x) - x^2$.]

corrigé

La fonction g est continue sur $[0, 1]$. On a $g(0) = f(0) \geq 0$ (car f prend ses valeurs dans $[0, 1]$) et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ (car f prend ses valeurs dans $[0, 1]$). Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors qu'il existe x_2 t.q. $g(x_2) = 0$, c'est-à-dire $f(x_2) = (x_2)^2$.

---

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe $x_n \in [0, 1]$ tel que $f(x_n) = (x_n)^n$.

corrigé

Pour $x \in [0, 1]$, on pose $h_n(x) = f(x) - x^n$. La fonction h_n est continue sur $[0, 1]$ et on a, comme à la question précédente, $h_n(0) = f(0) \geq 0$ et $h_n(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors qu'il existe x_n t.q. $h_n(x_n) = 0$, c'est-à-dire $f(x_n) = (x_n)^n$.

---

3. On suppose maintenant que f est strictement décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [0, 1]$, on pose $h_n(x) = f(x) - x^n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que h_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et qu'il existe un unique $x_n \in [0, 1]$ tel que $f(x_n) = (x_n)^n$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $h_{n+1}(x_n) > 0$. En déduire $x_{n+1} > x_n$.

   Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente et que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$. Quelle est la limite de $(x_n)^n$ quand $n \to +\infty$?

corrigé

La fonction $x \mapsto -x^n$ est aussi strictement décroissante sur $[0, 1]$. La fonction h_n est donc strictement décroissante comme somme de deux fonctions strictement décroissantes. L'existence de $x_n \in [0, 1]$ t.q. $h_n(x_n) = 0$ est donnée par la question précédente. L'unicité de x_n vient de la strict décroissance de h_n car si $x_n \in [0, 1]$ est t.q. $h_n(x_n) = 0$, on a, pour tout $x \in [0, 1] \setminus \{x_n\}$, $h_n(x) > 0$ si $x < x_n$ et $h_n(x) < 0$ si $x > x_n$, et donc $h_n(x) \neq 0$. Le point x_n est donc le seul élément de $[0, 1]$ pour lequel h_n s'annule.

Comme f est strictement décroissante, on $f(1) < f(0)$. Puis, comme $f(0), f(1) \in [0,1]$, on a donc $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$. On en déduit $x_n \neq 0$ (car $h_n(0) = f(0) > 0$) et $x_n \neq 1$ (car $h_n(1) = f(1) - 1 < 0$). Ce qui montre que $0 < x_n < 1$. On a donc $h_{n+1}(x_n) = f(x_n) - (x_n)^{n+1} = h_n(x_n) + (x_n)^n - (x_n)^{n+1} = (x_n)^n(1 - x_n) > 0$. Comme $h_{n+1}(x_{n+1}) = 0 < h_{n+1}(x_n)$ et que h_{n+1} est strictement décroissante, on a nécessairement $x_{n+1} > x_n$.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante majorée (par 1), elle est donc convergente. On note a la limite de cette suite. Comme $0 < x_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a donc $a \in [0,1]$. On remarque maintenant que $\lim_{n\to+\infty}(x_n)^n = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$ (car f est continue en a). Si $a \in [0,1[$, on a $\lim_{n\to+\infty}(x_n)^n = 0$ et donc $f(a) = 0$, ce qui est impossible car la décroissance strict de f donne $f(a) > f(1) \geq 0$. On a donc nécessairement $a = 1$ (et donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$). Enfin, on a $\lim_{n\to+\infty}(x_n)^n = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(1)$.

Exercice 2.38 (Borne supérieure d'une fonction)

On définit la fonction f de $]0,\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{x}\cos(x)$ pour $x \in]0,\infty[$. On pose $A = \{f(x), x \in]0,\infty[\}$.

1. Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$.

corrigé

$\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

---

2. Montrer que la fonction f n'est pas minorée (i.e. la partie A n'est pas minorée).

corrigé

La fonction f n'est pas minorée car $\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$.

---

3. (a) Montrer qu'il existe α, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \beta$, t.q., pour tout $x \in]0,\infty[$, $f(x) \leq \sup B$ avec $B = \{f(y);\, y \in [\alpha,\beta]\}$.

corrigé

On prend $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\beta = \pi$. La fonction f est continue sur $[\alpha,\beta]$ qui est un intervalle fermé borné. La fonction f est donc bornée sur $[\alpha,\beta]$ et atteint ses bornes. il existe donc $c \in [\alpha,\beta]$ t.q. $f(c) = \sup B$ (et donc, pour tout $x \in [\alpha,\beta]$, $f(c) \geq f(x)$).

On a, en particulier, $f(c) \geq f(\beta) = f(\pi) = \frac{1}{\pi}$.
Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $f(x) \leq 0 < \frac{1}{\pi} \leq f(c)$.
Pour $x > \pi$, on a $f(x) \leq |f(x)| \leq \frac{1}{x} < \frac{1}{\pi} \leq f(c)$.
On a donc bien, pour tout $x \in]0,\infty[$, $f(x) \leq f(c) = \sup B$ (ce qui donne $\sup A = \sup B$).

(b) En déduire que la fonction f est majorée (i.e. la partie A est majorée) et que la borne supérieure de f est atteinte.

corrigé

La démonstration précédente donne que $f(c) = \sup A$. La fonction f est donc majorée (i.e. la partie A est majorée) et la borne supérieure de f est atteinte.

Soit $a \in]0,\infty[$ t.q. $f(a) = \sup A$ (c'est-à-dire $f(a) \geq f(x)$ pour tout $x \in]0,\infty[$).

4. Montrer que $f(a) > 0$ et que $a < 2\pi$.

corrigé

On a, en particulier, $f(a) \geq f(\pi) = \frac{1}{\pi} > 0$.

La démonstration de la question 3(a) donne que $a \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ (car $f(x) < \sup B$ si $x \notin [\frac{\pi}{2}, \pi]$ et $f(a) = \sup B$). On a donc $a \leq \pi < 2\pi$. Mais on peut aussi démontrer que $a < 2\pi$ en utilisant la périodicité de la fonction $x \mapsto \cos(x)$. En effet, on remarque que d'abord que $f(2\pi) < 0$, donc $a \neq 2\pi$. Puis, si $a > 2\pi$, on a $f(a - 2\pi) = \frac{-\cos(a)}{a-2\pi} > \frac{-\cos(a)}{a}$ car $\cos(a) > 0$. On en déduit $f(a - 2\pi) > f(a)$, en contradiction avec la définition de a. On a donc bien montré que $a < 2\pi$.

---

5. Montrer que $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}$ et que $f'(a) = 0$.

corrigé

On sait déjà que $a \in]0, 2\pi[$. Comme $f(a) > 0$ et que $f(x) \leq 0$ si $x \in]0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$, on en déduit que $a \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Le fait que $f'(a) = 0$ a été vu en cours (il suffit de remarquer que $f(a + h) - f(a) \leq 0$ pour tout $h \neq 0$ t.q. $a + h > 0$ et d'utiliser la définition de $f'(a)$).

---

6. Pour $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, on pose $g(x) = x \sin(x) + \cos(x)$. Montrer qu'il existe un unique $b \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ t.q. $g(b) = 0$. Montrer que $b \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Montrer que $a = b$ et en déduire que f atteint son maximum en un unique point.

corrigé

Pour $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, on a $g'(x) = x \cos(x) < 0$. La fonction g est donc continue et strictement décroissante (ceci a été vu en cours) sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Comme $g(\frac{\pi}{2}) > 0$ et $g(\frac{3\pi}{2}) < 0$, il existe un unique $b \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ t.q. $g(b) = 0$ (l'existence de b découle du théorème des valeurs intermédiaires et l'unicité de b découle de la stricte décroissance de g).

Comme $g(\pi) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires (appliqué avec l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi]$) permet de dire que cet unique b appartient à l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Comme $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, pour tout $x \in]0, \infty[$, et comme l'on sait que $a \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ et $f'(a) = 0$, on a nécessairement $a = b$. Ceci prouve que b est l'unique point de $]0, \infty[$ pour lequel f atteint son maximum.

Exercice 2.39 (Valeur intermédiaire)

Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Soit f une fonction continue de $[0, \alpha[$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $f(0) < 0$ et $\lim\limits_{x \to \alpha, x < \alpha} f(x) = +\infty$.

Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $g(0) < 0$ et $g(\beta) > 0$.

Montrer qu'il existe $x \in]0, \min(\alpha, \beta)[$ t.q. $f(x)(x - \beta) - g(x) = 0$. [On pourra distinguer les cas $\beta < \alpha$, $\beta > \alpha$ et $\beta = \alpha$.]

corrigé

Pour $x \in [0, \alpha[$, on pose $\varphi(x) = f(x)(x - \beta) - g(x)$. La fonction φ est donc continue sur $[0, \alpha[$.

Cas $\beta < \alpha$**.** Dans ce cas, la fonction φ est continue sur $[0, \beta]$. On remarque que $\varphi(0) > 0$ et $\varphi(\beta) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne donc l'existence de $x \in]0, \beta[$ t.q. $\varphi(x) = 0$.

Cas $\beta > \alpha$. Dans ce cas, on a $\lim_{x \to \alpha, x < \alpha} \varphi(x) = -\infty$. Il existe donc, par exemple, $\eta > 0$ t.q. :

$$x \in [0, \alpha[, \ x \geq \alpha - \eta \Rightarrow \varphi(x) < 0.$$

On en déduit l'existence de $\gamma \in]0, \alpha[$ t.q. $\varphi(\gamma) < 0$. Comme $\varphi(0) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires donne donc l'existence de $x \in]0, \gamma[\subset]0, \alpha[$ t.q. $\varphi(x) = 0$.

Cas $\beta = \alpha$. On modifie légèrement le raisonnement précédent. Comme $\lim_{x \to \alpha, x < \alpha} f(x) = +\infty$. Il existe $\eta > 0$ t.q. :

$$x \in [0, \alpha[, \ x \geq \alpha - \eta \Rightarrow f(x) > 0.$$

Comme $x - \beta < 0$ si $x < \alpha = \beta$, on a donc

$$x \in [0, \alpha[, \ x \geq \alpha - \eta \Rightarrow \varphi(x) < 0.$$

On conclut alors comme dans le cas précédent.

Exercice 2.40

Soit f une application continue d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f ne s'annule pas sur I. Montrer que f garde un signe constant sur I.

corrigé

On raisonne par contraposée. Si f ne garde pas un signe constant sur l'intervalle I (qui n'est pas nécessairement fermé ni borné), cela signifie qu'il existe $a, b \in I$ t.q. $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Comme 0 est une valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe donc x entre a et b t.q. $f(x) = 0$. Comme I est un intervalle contenant a et b, il contient aussi x. Donc, f s'annule sur I.

On a bien ainsi montré que si f ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors f est de signe constant sur I.

Exercice 2.41

Montrer que le polynôme $x^{30} + 14x^{17} - 7x^5 - 7$ admet au moins une racine dans l'intervalle $]0, 1[$.

corrigé

On pose $f(x) = x^{30} + 14x^{17} - 7x^5 - 7$. Le polynôme f est une fonction continue sur $[0, 1]$. On remarque que $f(0) = -7$ et $f(1) = 1$. Comme 0 est une valeur intermédiaire entre $f(0)$ et $f(1)$, il existe donc $x \in]0, 1[$ t.q. $f(x) = 0$.

Exercice 2.42

Montrer que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$. En déduire que l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.

corrigé

Soit $x, y \in \mathbb{R}^+$, avec $x \geq y$. Le plus rapide est de remarquer que $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \leq x + y - 2\sqrt{y}\sqrt{y}$ (car $\sqrt{y} \leq \sqrt{x}$). On en déduit que $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq x - y$, c'est-à-dire $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y}$. Le cas $y \geq x$ est similaire. On a donc, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On prend $\alpha = \varepsilon^2$. On obtient ainsi :

$$x, y \in \mathbb{R}^+, \ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} \leq \sqrt{\alpha} = \varepsilon.$$

Ceci prouve bien que l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour montrer que $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$, on raisonne par l'absurde. On suppose donc que f est uniformément continue sur $]0,1]$. Il existe alors (en particulier) $\alpha > 0$ t.q. :

$$x, y \in]0,1], \ |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| \leq 1. \tag{2.4}$$

On prend alors $\beta = \min\{\frac{1}{4}, \alpha\}$, $x = 2\beta$ et $y = \beta$. On a bien $x, y \in]0,1]$ et $|x-y| = \beta \leq \alpha$. Pourtant, on a $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = \frac{\beta}{2\beta^2} = \frac{1}{2\beta} \geq 2 > 1$, en contradiction avec (2.4). Ce qui prouve que f n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.

Exercice 2.43
Soit f l'application de $[-1,\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x2+2x+2}}$, pour tout $x \geq -1$. Montrer que f est bijective de $[-1,\infty[$ dans $]0,1]$ et donner ue formule explicite pour sa fonction réciproque.

corrigé

La fonction $h \ : \ x \mapsto (x^2+2x+2)$ est continue et strictement croissante sur $[-1,\infty[$ (car sa dérivée est strictement positive sur $]-1,\infty[$). Comme $h(-1) = 1$, elle est aussi strictement positive. On en déduit que la fonction f (définie par $f = 1/\sqrt{h}$) est bien définie, continue et strictement décroissante sur $[-1,\infty[$. Le théorème 2.5 (appliqué à la fonction $-f$ pour se ramener au cas d'une fonction strictement croissante) donne alors qu'elle est bijective de $[-1,\infty[$ sur son image et que cette image est l'intervalle $]0,1]$ car $f(-1) = 1$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. La fonction réciproque de f, notée g, est donc une fonction continue strictement décroissante de $]0,1]$ dans $[-1,\infty[$.

Soit $y \in]0,1]$. On calcule maintenant explictement $g(y)$. On pose $x = g(y)$ de sorte que $x \in [-1,\infty[$ et $y = f(x)$. On a donc $x^2+2x+2 = \frac{1}{y^2}$. Ceci donne $(x+1)^2 = \frac{1}{y^2} - 1$. Comme $x \in [-1,\infty[$, on a $x+1 \geq 0$ et donc $x+1 = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}$, c'est-à-dire :

$$x = -1 + \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

Exercice 2.44

1. Soit f la fonction de $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+\frac{1}{x}} \text{ si } \ x > 0, \\ x \text{ si } \ x < 0. \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On note $\widetilde{f}$ son prolongement.
   La fonction f est continue sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. De plus, on a $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(0)$ et donc f est prolongeable par continuité en posant $\widetilde{f}(0) = 0$.

   (b) Soit $F_- = \{f(x), x \leq 0\}, F_+ = \{f(x), x > 0\}$ et $F = \{\tilde{f}(x), x \in \mathbb{R}\}$. Trouver, s'ils existent, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, les plus grand et plus petit élements de F_-, F_+ et F.
   La fonction f tend vers $-\infty$ en $-\infty$, donc

- F_- et F n'admettent ni minorant, ni borne inférieure, ni bien sûr, plus petit élément.

La fonction f est croissante sur $]-\infty, 0[$, et donc

- $\sup F_- = f(0) = 0$, qui est aussi le plus grand élément. et n'a pas de plus petit élément,
- L'ensemble des majorants de F_- est donc $[0, +\infty[$.

La fonction f est continue, dérivable et strictement positive sur $]0, +\infty[$; elle est croissante sur $]0, 1]$ et décroissante sur $]1, +\infty[$, atteint son max pour $x = 1$, et on a $f(1) = \frac{1}{2}$. On en déduit que

- F_+ admet 0 comme borne inférieure, $]-\infty, 0]$ comme ensemble de minorants, et n'a pas de plus petit élément,
- F_+ admet $\frac{1}{2}$ comme borne supérieure et plus grand élément, $[\frac{1}{2}, +\infty[$ comme ensemble de majorants.

Comme $F = F_- \cup F_+$,

- l'ensemble F n'admet ni minorant, ni borne inférieure, ni bien sûr, plus petit élément, et il admet $\frac{1}{2}$ comme borne supérieure et plus grand élément, $[\frac{1}{2}, +\infty[$ comme ensemble de majorants.

(c) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \sup\{\tilde{f}(t), t \in]-\infty, x]\}$. Montrer qu'on définit ainsi une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner l'expression de g et en déduire que g est continue.

Par la question précédente, on sait que f est croissante sur $]-\infty, 1]$, et décroissante sur $[1, +\infty[$; son maximum est atteint en $x = 1$ et vaut $\frac{1}{2}$. On a donc

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0, \\ x + \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in]0, 1], \\ \frac{1}{2} & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

et il est donc facile de voir que g est continue.

2. Soient A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. Montrer que si B est majorée, alors A est majorée et $\sup A \leq \sup B$.

Notons M un majorant de B. Soit $x \in A$, comme $A \subset B$ on a aussi $x \in B$, donc $x \leq M$, ce qui montre que M est aussi un majorant de A.

3. Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue au point $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $y, z \in [x - \delta, x + \delta]$, alors $|\varphi(y) - \varphi(z)| \leq \varepsilon$. En déduire que si $y, z \in [x - \delta, x + \delta]$, alors $\varphi(z) \leq \varphi(y) + \varepsilon$.

On obtient le premier résultat par l'inégalité triangulaire :

$$|\varphi(z) - \varphi(y)| \leq |\varphi(z) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi(y)|.$$

On obtient facilement l' inégalité suivante.

4. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ majorée.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $F_x = \{f(t), t \in]-\infty, x]\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, et qu'on peut donc définir $g(x) = \sup F_x$.

Comme f est majorée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) \leq M$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$:; par définition, $f(x) \in F_x$ donc $F_x \neq \emptyset$. De plus, si $y \in F_x$, il existe $t \in]-\infty, x]$ tel que $y = f(t)$ et donc $y \leq M$, ce qui montre que F_x est majorée. L'ensemble F_x admet donc une borne supérieure, qu'on note $g(x)$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, donner l'expression de $g(x)$ si f est définie par $f(x) = -x^2$, puis par $f(x) = \sin x$.

La fonction $x \mapsto -x^2$ est croissante pour $x \leq 0$, donc $g(x) = -x^2$ si $x \leq 0$. Pour $x \geq 0$ la fonction est décroissante, et donc $g(x) = 0$ si $x \geq 0$.

La fonction sin est périodique de période 2π et oscille entre -1 et 1, et donc $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) Montrer que la fonction g est croissante.

Si $x \geq y$ alors $F_x \subset F_y$ et par la question 2, $g(x) \leq g(y)$.

(d) Soient x et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, montrer que $g(y) = \sup\left(g(x), \sup\{f(t), x \leq t \leq y\}\right)$.

Par définition, $g(y) = \sup\{f(t), t \leq y\}$, et donc

$$\begin{aligned} g(y) &= \sup\left(\sup\{f(t), t \leq x\}, \sup\{f(t), x \leq t \leq y\}\right) \\ &= \sup\left(g(x), \sup\{f(t), x \leq t \leq y\}\right). \end{aligned}$$

(e) On suppose que f est continue.

i. Soient x et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$, et soit $\varepsilon > 0$. On suppose que $f(z) \leq f(x) + \varepsilon$ pour tout $z \in [x, y]$. Montrer que $g(x) \leq g(y) \leq g(x) + \varepsilon$.

D'après la question précédente, $g(y) = \sup\left(g(x), \sup\{f(t), x \leq t \leq y\}\right)$, et donc $g(y) \leq \sup\{f(z), x \leq z \leq y\} \leq f(x) + \varepsilon$ par hypothèse. On a déjà vu que g est croissante, donc on a bien

$$g(x) \leq g(y) \leq g(x) + \varepsilon.$$

ii. Montrer que g est continue à droite, puis à gauche, et donc continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Continuité à droite. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, on veut montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - y| \leq \delta$ et $x \leq y$ alors $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$. Comme f est continue, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - z| \leq \delta$ alors $|f(x) - f(z)| \leq \varepsilon$. Soit $y \geq x$ tel que $|x - y| \leq \delta$. On a donc $f(z) \leq f(x) + \varepsilon$ pour tout $z \in [x, y]$. D'après la question $4(e)i$, on a alors

$$0 \leq g(y) - g(x) \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$.

Continuité à gauche. Comme f est continue, d'après la question 3, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - y| \leq \delta$ et $|x - z| \leq \delta$, alors $|f(z) - f(y)| \leq \varepsilon$. Soit maintenant $y \leq x$ tel que $|x - y| \leq \delta$. On a donc $f(z) \leq f(y) + \varepsilon$ pour tout $z \in [y, x]$, et donc par la question $4(e)i$, on a

$$0 \leq g(x) - g(y) \leq \varepsilon$$

et donc $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$.

On a donc montré la continuité à droite et à gauche de g. La fonction g est donc bien continue.

Chapitre 3

Dérivée

3.1 Définitions

Définition 3.1 *Soit* $-\infty \leq a < b \leq \infty$, f *une application de* $]a, b[$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $x \in]a, b[$. *Pour* $h \in]a - x, b - x[$, $h \neq 0$, *on pose* $\varphi(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. *On dit que* f *est dérivable en* x *si* φ *a une limite finie en* 0 *(cette limite est alors unique, d'après la proposition 1.1, chapitre 1). On note alors* $f'(x)$ *cette limite (on a donc* $f'(x) = \lim_{h\to 0} \varphi(h)$*).*

Remarque 3.1 On reprend les hypothèses de la définition précédente. Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$. f une application de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in]a, b[$. Pour $h \in]a - x, b - x[$, $h \neq 0$ on pose $\varphi(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. On suppose que φ a une limite finie en 0. Cette limite est notée $f'(x)$. En posant $\varphi(0) = f'(x)$, la fonction φ est alors continue en 0.

Nous donnons maintenant une autre manière de définir la dérivée. L'intérêt de cette seconde définition est qu'elle sera généralisable pour des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ si $n > 1$.

Définition 3.2 *Soit* $-\infty \leq a < b \leq \infty$, f *une application de* $]a, b[$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $x \in]a, b[$. *On dit* f *est différentiable en* x *si il existe* $A \in \mathbb{R}$ *t.q.*

$$f(x + h) = f(x) + Ah + hg(h), \text{ pour } h \text{ t.q. } x + h \in]a, b[,$$

avec $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$ *(et donc* g *continue en* 0 *si on pose* $g(0) = 0$*). La différentielle de* f *en* x *est alors l'application linéaire de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *:* $h \mapsto Ah$. *(La proposition 3.1 montre que* A *est unique.)*

Voici le lien entre ses deux définitions.

Proposition 3.1 *Soit* $-\infty \leq a < b \leq \infty$, f *une application de* $]a, b[$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $x \in]a, b[$. *On a alors :*

1. *L'application* f *est dérivable en* x *si et seulement si elle est différentiable en* x.
2. *Si* f *est dérivable, la différentielle de* f *est l'application linéaire de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *:* $h \mapsto f'(x)h$.

Démonstration :
Pour $h \in]a - x, b - x[$, $h \neq 0$, on pose $\varphi(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
Si f est dérivable en x, on a $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = f'(x)$, c'est-à-dire $\varphi(h) = f'(x) + g(h)$ avec $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$. On en déduit donc que $f(x + h) = f(x) + hf'(x) + hg(h)$ avec $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$. Ceci montre que f est

différentiable en x et que la différentielle de f en x est l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à h associe $f'(x)h$.

Réciproquement, on suppose maintenant que f est différentiable en x. Il existe donc $A \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x+h) = f(x) + Ah + hg(h)$ (pour h t.q. $x + h \in]a, b[$) et $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$. On en déduit que $\varphi(h) = A + g(h)$ et donc, comme $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$, que f est dérivable en x et $f'(x) = A$.

On a donc bien montré les deux assertions de la proposition 3.1. ∎

Définition 3.3 (Tangente à la courbe) *Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, f une application de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ et $c \in]a, b[$. On suppose que f est dérivable au point c. La tangente à la courbe de f au point $(c, f(c))$ est la droite d'équation $x \mapsto f(c) + f'(c)(x - c)$.*

Remarque 3.2 Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en x. En général (c'est à dire en dehors de certains points particuliers que nous appellerons “points d'inflexion”), la droite de pente $f'(x)$ et passant par le point $(x, f(x))$ est la seule, parmi toutes les droites passant par le point $(x, f(x))$, à ne pas traverser le courbe de f au point $(x, f(x))$.

Remarque 3.3 Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, f une application de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in]a, b[$. Le fait que f soit dérivable en x implique que f est continue en x. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple $f(x) = |x|$ pour $x \in \mathbb{R}$ (f est continue en 0 mais non dérivable en 0).

3.2 Opérations sur les dérivées

Proposition 3.2 *Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$. f et g deux applications de $I =]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in]a, b[$. On suppose que f et g sont dérivables en x. Alors :*

1. *L'application $f + g$ est dérivable en x et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.*
2. *L'application fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$.*
3. *On suppose $g(y) \neq 0$ pour tout $y \in I$. L'application f/g est alors définie sur I, f/g est dérivable en x et :*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Démonstration :
Pour simplifier les écritures (cela ne change pas les raisonnements), on se limite au cas $I = \mathbb{R}$.

1. Pour $h \neq 0$, on remarque que
$$\frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$
Comme les deux termes de droite ont une limite quand $h \to 0$, on en déduit que le terme de gauche a aussi une limite quand $h \to 0$. Cette limite est $f'(x) + g'(x)$. Ceci prouve bien que $f + g$ est dérivable en x et que $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

2. la démonstration est un peu plus longue pour ce deuxième item. Pour $h \neq 0$, on a :
$$\frac{fg(x+h) - fg(x)}{h} = \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h}.$$
Comme f est dérivable en x et que g est continue en x (car g est dérivable en x), le premier terme du membre de droite tend vers $f'(x)g(x)$ quand h tend vers 0. Comme g est dérivable en x, le second terme du membre de droite tend vers $f(x)g'(x)$ quand h tend vers 0. On obtient bien, finalement, que fg est dérivable en x et que $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

3. Pour ce troisième item, on commence par montrer que la fonction $1/g$ (qui est bien définie sur I car g ne s'annule pas) est dérivable et par calculer sa dérivée. Pour $h \neq 0$, on a :
$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) = \frac{g(x) - g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} = -\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\frac{1}{g(x+h)g(x)}.$$
Comme g est continue et dérivable en x, on en déduit que $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ et donc que $\frac{1}{g}$ est dérivable en x et que sa dérivée est $\frac{-g'(x)}{g^2(x)}$.

   Pour conclure on utilise maintenant le deuxième item en remarquant que $\frac{f}{g} = f\left(\frac{1}{g}\right)$. On obtient que $\frac{f}{g}$ est dérivable en x et que
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$
■

Proposition 3.3 (Dérivée d'une fonction composée) *Soit I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, g une application de I dans $\mathbb{R}$ et f application de J dans $\mathbb{R}$. On suppose que* $\mathrm{Im}(g) \subset J$. *Soit $x \in I$. On suppose que g est dérivable en x et f dérivable en $g(x)$. Alors, $f \circ g$ est dérivable en x et $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.*

Démonstration : Ici aussi, on suppose, pour simplifier les écritures, que $I = J = \mathbb{R}$. On va raisonner ici en utilisant plutôt la notion de différentiabilité (équivalente, par la proposition 3.1, à la notion de dérivabilité).
Comme g est différentiable en x, on a pour tout $h \in \mathbb{R}$,
$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + hr(h),$$
avec $\lim_{h\to 0} r(h) = 0$ (et donc r continue en 0 en posant $r(0) = 0$, comme cela est dit dans la définition 3.2).
Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a donc :
$$f \circ g(x+h) = f(g(x+h)) = f(g(x) + g'(x)h + hr(h)). \tag{3.1}$$
On utilise maintenant le fait que f est différentiable en $g(x)$, on a donc pour tout $k \in \mathbb{R}$,
$$f(g(x) + k) = f(g(x)) + f'(g(x))k + ks(k), \tag{3.2}$$
avec $\lim_{k\to 0} s(k) = 0$ (et donc s continue en 0 en posant $s(0) = 0$). Dans (3.2), on prend $k = g'(x)h + hr(h)$, on obtient, avec (3.1), pour tout $h \in \mathbb{R}$:
$$f \circ g(x+h) = f \circ g(x) + f'(g(x))g'(x)h + f'(g(x))hr(h) + (g'(x)h + hr(h))s(g'(x)h + hr(h)),$$

que l'on peut aussi écrire

$$f \circ g(x+h) = f \circ g(x) + f'(g(x))g'(x)h + hR(h),$$

avec $R(h) = f'(g(x))r(h) + g'(x)s(g'(x)h + hr(h)) + r(h)s(g'(x)h + hr(h))$. Par composition de fonctions continues (les fonctions s et r sont continues en 0), on a $\lim_{h\to 0} s(g'(x)h + hr(h)) = 0$ et donc $\lim_{h\to 0} R(h) = 0$. Ce qui prouve que $f \circ g$ est différentiable, et donc dérivable, en x et que sa dérivée est $f'(g(x))g'(x)$. ■

Proposition 3.4 (Fonction réciproque) *Soit $-\infty \le a < b \le \infty$ et f une application de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est strictement croissante et continue. On rappelle (théorème 2.5) que f est alors une bijection de $]a, b[$ dans $]\alpha, \beta[$ (avec $\alpha = \inf(\mathrm{Im}(f))$ et $\beta = \sup(\mathrm{Im}(f))$). On note g la fonction réciproque de f. Soit $x \in]a, b[$. on suppose que f dérivable en x et $f'(x) \neq 0$. Alors g est dérivable en $f(x)$ et $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.*

Démonstration : Le théorème 2.5 donne que g est continue (sur tout l'intervalle $]\alpha, \beta[$) et donc continue en $f(x)$ (c'est-à-dire au point $f(x)$). On montre maintenant que g est dérivable en $f(x)$. On pose $y = f(x)$, de sorte que $x = g(y)$. Soit $h \neq 0$ t.q. $y + h \in]\alpha, \beta[$ (noter que $y \in]\alpha, \beta[$). On a, comme $f \circ g(z) = z$ pour tout $z \in]\alpha, \beta[$:

$$\frac{g(y+h) - g(y)}{h} = \frac{g(y+h) - g(y)}{(y+h) - y} = \frac{g(y+h) - g(y)}{f \circ g(y+h) - f \circ g(y)}.$$

Mais $g(y) = x$ et $g(y+h) = g(y) + k(h) = x + k(h)$ avec $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$ car g est continue en y (noter d'ailleurs que $k(h) \neq 0$ car $h \neq 0$ et g injective). On a donc :

$$\frac{g(y+h) - g(y)}{h} = \frac{x + k(h) - x}{f(x + k(h)) - f(x)} = \frac{k(h)}{f(x + k(h)) - f(x)}$$

Par composition de limite (proposition 1.10) ou composition de fonctions continues (en posant $k(0) = 0$), on en déduit :

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(y+h) - g(y)}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{f(x+k) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)},$$

ce qui montre bien que g est dérivable en y et $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$. ■

Remarque 3.4 Dans la proposition 3.4, si on admet que g est dérivable en $f(x)$, la formule donnant g' au point $f(x)$ est facile à retrouver en écrivant que $g \circ f(y) = y$, pour tout y, et en dérivant la fonction composée $g \circ f$ (proposition 3.3) en x. En effet, en supposant que g est dérivable en $f(x)$, la proposition 3.3 donne que $g \circ f$ est dérivable en x et $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$. Comme $g \circ f(y) = y$ pour tout y, on a aussi $(g \circ f)'(x) = 1$ et donc, puisque l'on a supposé que $f'(x) \neq 0$, $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

Exemple 3.1

1. On note ln l'application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée est l'application $x \mapsto 1/x$ et qui s'annule en 1 (nous verrons au chapitre 5 que cette application existe, c'est la primitive s'annulant en 1 de l'application $x \mapsto 1/x$ définie sur $]0, +\infty[$). L'application ln est strictement croissante et continue (car dérivable) et son image est égale $\mathbb{R}$. La fonction réciproque de la fonction ln existe donc et est strictement croissante continue de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$ (théorème 2.5). Cette fonction réciproque s'appelle la fonction exponentielle, c'est l'application $x \mapsto e^x$. En appliquant la proposition 3.4, avec $f = \ln$ et g la fonction réciproque, on obient pour tout $x \in]0, \infty[$, $g'(\ln(x)) = x$ (car $f'(x) = 1/x \neq 0$) et donc, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g'(y) = g(y)$ (car $x = g(\ln(x))$). On a ainsi montré que la dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle elle-même.

2. On définit ici l'application f de $]0,\infty[$ dans $]0,\infty[$ par $f(x) = x^4$ si $x \in]0,\infty[$. On montre tout d'abord que f est dérivable en tout point de $]0,+\infty[$ et $f'(x) = 4x^3$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. On en déduit que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}$ où g est la fonction réciproque de f.

3.3 Théorème des Accroissements Finis

Nous commençons par un cas particulier du théorème des Accroissements Finis.

Théorème 3.1 (Théorème de Rolle) *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. on suppose que f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ (c'est-à-dire dérivable en tout point de $]a,b[$). on suppose aussi que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ t.q. $f'(c) = 0$.*

Démonstration : Nous démontrons ce théorème en distinguant 3 cas possibles.

Premier cas. On suppose que $f(x) = f(a)$ pour tout $x \in [a,b]$. On prend alors pour c un point quelconque de $]a,b[$ (par exemple $c = \frac{1}{2}(a+b)$) et on a bien $f'(c) = 0$.

Deuxième cas. On suppose qu'il existe $x \in [a,b]$ t.q. $f(x) > f(a)$. Comme f est continue sur $[a,b]$, d'après le théorème 2.3, il existe $c \in [a,b]$ t.q. $f(c) = M = \max\{f(x),\ x \in [a,b]\}$. Comme $M > f(a) = f(b)$, on a donc $c \in]a,b[$. Pour $h \neq 0$ t.q. $a \leq c+h \leq b$, on pose

$$\varphi(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Pour $h > 0$, on a $f(c+h) \leq M = f(c)$ et donc $\varphi(h) \leq 0$. On en déduit que $f'(c) = \lim_{h\to 0, h>0} \varphi(h) \leq 0$.

Pour $h < 0$, on a $f(c+h) \leq M = f(c)$ et donc $\varphi(h) \geq 0$. On en déduit que $f'(c) = \lim_{h\to 0, h<0} \varphi(h) \geq 0$.

Finalement, on a donc nécessairement $f'(c) = 0$.

Troisième cas. On suppose qu'il existe $x \in [a,b]$ t.q. $f(x) < f(a)$. On raisonne alors de manière semblable au cas précédent. On remarque qu'il existe $c \in]a,b[$ t.q. $f(c) = m = \min\{f(x),\ x \in [a,b]\}$. Puis, on montre que $f'(c) = 0$. ■

Nous donnons maintenant le théorème des Accroissements Finis.

Théorème 3.2 (Théorème des Accroissements Finis) *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. on suppose que f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ t.q. $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.*

Démonstration : On va utiliser le théorème 3.1 pour une fonction bien choisie. Pour $x \in [a,b]$, on pose

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

La fonction g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. De plus, on a $g(b) = g(a) = f(a)$. Le théorème 3.1 montre donc qu'il existe $c \in]a,b[$ t.q. $g'(c) = 0$. Comme $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, pour tout $x \in]a,b[$, on a donc $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, c'est-à-dire $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. ■

Voici maintenant quelques conséquences du théorème des Accroissements Finis.

Remarque 3.5 Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. on suppose f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On a alors :

1. $f(b) - f(a) = \gamma(b-a)$ avec $\overline{m} \le \gamma \le \overline{M}$, $\overline{m} = \inf\{f'(x),\, x \in]a,b[\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\overline{M} = \sup\{f'(x),\, x \in]a,b[\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. (C'est équivalent à la conclusion du théorème des Accroissements Finis sauf que le théorème des Accroissements Finis donne des inégalités strictes sur γ lorsque les bornes $\overline{m}$ et $\overline{M}$ ne sont pas atteintes. Cette équivalence est due au fait que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.)
2. On suppose de plus qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $|f'(x)| \le M$ pour tout $x \in]a,b[$. Alors $|f(b) - f(a)| \le M|b-a|$. (C'est cette forme du théorème des Accroissements Finis qui pourra être généralisée au cas d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, voir le théorème 6.1. La forme donnée dans le théorème 3.2 n'étant plus vraie si $p > 1$.)
3. On suppose de plus que $f'(x) \ge 0$ pour tout $x \in]a,b[$. Alors f est croissante.
4. On suppose de plus que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a,b[$. Alors f est strictement croissante.
5. On suppose de plus que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a,b[$. Alors f est constante.

On suppose maintenant que f et g sont continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ et que $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in]a,b[$. Alors $f - g$ est constante.

3.4 Fonctions de classe C^n

Définition 3.4 *Soit $-\infty \le a < b \le \infty$ et f une application de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$.*

1. *f est dérivable sur $]a,b[$ si f est dérivable en tout point de $]a,b[$.*
2. *f est de classe C^0 (on écrit $f \in C^0(]a,b[)$ ou $f \in C(]a,b[)$) si f est continue sur $]a,b[$.*
3. *$n \ge 1$. f est de classe C^n sur $]a,b[$ (on écrit $f \in C^n(]a,b[)$) si f est dérivable sur $]a,b[$ et f' est de classe C^{n-1}.*
4. *f est de classe C^∞ sur $]a,b[$ si, pour tout $n \ge 0$, f est de classe C^n sur $]a,b[$.*

Notation : $f^{(0)} = f$ et, pour $n \ge 1$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Exemple 3.2 Exemples de fonctions de classe C^∞.

1. $a = -\infty$, $b = \infty$. $f(x) = e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$. f est de classe C^∞ et $f^{(n)} = f$ pour tout $n \ge 0$.
2. $a = 0$, $b = \infty$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $g(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ pour $x \in]a,b[$. g est de classe C^∞, $g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, pour tout $x \in]a,b[$, et, par récurrence sur n, $g^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ pour tout $x \in]a,b[$ et pour tout $n \ge 2$.
3. $a = 0$, $b = \infty$. $h(x) = \ln(x)$ pour $x \in]a,b[$. h est de classe C^∞ et $h'(x) = x^{-1}$ pour tout $x \in]a,b[$ (pour calculer les dérivées suivantes de h, on utilise alors le deuxième item). (On rappelle que la fonction ln est définie, sur $\mathbb{R}_+^\star$, comme étant la primitive de $x \mapsto 1/x$ s'annulant en 1. L'existence de cette primitive est montrée au chapitre 5.)

3.5 Exercices

Exercice 3.1 (Opérations sur les dérivées)

Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $x \in]a, b[$ et f, g deux applications de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont dérivables en x.

1. Montrer que $(f + g)$ est dérivable en x et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
2. Montrer que fg est dérivable en x et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
3. On suppose que $g(y) \neq 0$ pour tout $y \in]a, b[$. Montrer que f/g est dérivable en x et que :

$$(f/g)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Exercice 3.2 (Dérivée en un point)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable pour tout $x \neq 0$ et que f' (définie sur $\mathbb{R}^\star$) admet une limite en 0, notée l. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = l$. [On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.]

Exercice 3.3 (Dérivabilité de $x \mapsto |x|^a$)

Etudier, selon les valeurs du paramètre $a > 0$, la continuité et la dérivabilité de l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|^a$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$ et $f(0) = 0$.

Exercice 3.4 (Sur la dérivabilité d'un produit)

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en a, que $f(a) = 0$ et que g a une limite dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers a. La fonction fg est elle dérivable en a ?

Exercice 3.5 (Dérivée non continue)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} &f(x) = 0, \text{ si } x \leq 0, \\ &f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, \text{ si } x > 0. \end{aligned}$$

Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La dérivée de f est-elle continue ?

Exercice 3.6 (Dérivée et propriété des valeurs intermédiaires)

Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ et f une application de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable pour tout $x \in]a, b[$. On va montrer, dans cet exercice, que f' (définie sur $]a, b[$) vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Soit $c, d \in]a, b[$, $c < d$, et γ appartenant à l'intervalle ouvert dont les bornes sont $f'(c)$ et $f'(d)$.

1. Montrer que pour $\eta > 0$ suffisamment petit, γ appartient à l'intervalle ouvert dont les bornes sont $\frac{f(c+\eta)-f(c)}{\eta}$ et $\frac{f(d-\eta)-f(d)}{-\eta}$.

2. On choisit $\eta \in]0, d-c[$ t.q. γ appartienne à l'intervalle ouvert dont les bornes sont $\frac{f(c+\eta)-f(c)}{\eta}$ et $\frac{f(d-\eta)-f(d)}{-\eta}$. On définit g de $[c, d-\eta]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{f(x+\eta)-f(x)}{\eta}, \text{ pour } x \in [c, d-\eta].$$

Montrer que g est continue sur l'intervalle $[c, d-\eta]$ et en déduire qu'il existe $y \in [c, d-\eta]$ t.q. $g(y) = \gamma$.

3. Montrer qu'il existe $z \in [c, d]$ t.q. $f'(z) = \gamma$.

Exercice 3.7 (Propriété des valeurs intermédiaires n'implique pas continuité)

En utilisant les deux exercices précédents, donner un exemple d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires et non continue.

Exercice 3.8 (Accroissements finis "généralisés")

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit f et g deux applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont dérivables pour tout $x \in]a, b[$ et que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1. Montrer que $g(x) - g(a) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b]$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ t.q. :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

[On pourra considérer la fonction u définie sur $[a, b]$ par $u(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$.]

Exercice 3.9

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable pour tout $x \in]a, b[$ (c'est-à-dire que f est dérivable pour tout $x \in]a, b[$ et que f', qui est donc définie sur $]a, b[$, est aussi dérivable pour tout $x \in]a, b[$). Soit $x_0 \in]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ t.q. :

$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0 - a) + \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2} A.$$

2. On définit φ sur $[a, b]$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - \frac{(x-a)(x-b)}{2} A.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, x_0[$ et $d \in]x_0, b[$ t.q. $\varphi'(c) = \varphi'(d) = 0$.

3. Montrer qu'il existe $\theta \in]a, b[$ t.q. :

$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0 - a) + \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2} f''(\theta).$$

Exercice 3.10

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x + e^x$. Montrer que f est strictement croissante, continue et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note g l'application réciproque de f. Montrer que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(1)$ et $g''(1)$.

Exercice 3.11 (Limite à l'infini)

Soit f une fonction dérivable de $]0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 3.12 (Dérivabilité en un point)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est dérivable en tout point x différent de a et que f' (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$) admet une limite en a, notée a_1. Montrer que f est dérivable en a et que $f'(a) = a_1$. [Cette question a été faite dans un exercice précédent avec $a = 0$.]

2. On suppose que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f^{(n)}$ (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$) admet une limite en a, notée a_n. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. [On pourra raisonner par récurrence sur n.]

Exercice 3.13 (Fonctions höldériennes)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ et $k \in \mathbb{R}, k > 0$. On suppose que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(y) - f(x)| \le k|y - x|^\beta$.

1. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

2. On suppose, dans cette question, que $\beta > 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $f'(x) = 0$. En dï¿œduire que f est constante.

3. (Exemple) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|g(y) - g(x)| \le |y - x|^{\frac{1}{2}}$. [On pourra montrer qu'on peut supposer $|y| \ge |x|$, et distinguer les cas où x et y sont de même signe et où x et y sont de signe contraire.]

Exercice 3.14 (Exercice de rédaction...)

Soit φ une application de $]0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$, dérivable (en tout point de $]0, \infty[$) et t.q. $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$.

1. On suppose que $\varphi'(x) \le 0$ pour tout $x > 0$. Montrer que $\varphi(x) \ge 0$ pour tout $x > 0$.

2. On suppose que $\varphi'(x) < 0$ pour tout $x > 0$. Montrer que $\varphi(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Exercice 3.15 (Etude d'une fonction)

Soit $a > 0$. On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &f(x) = (1 + \tfrac{a}{|x|})^x, \text{ si } x \neq 0, \\ &f(0) = 1. \end{aligned}$$

(On rappelle que $b^x = e^{x \ln b}$, pour $b > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.)

1. (Continuité de f)

(a) Montrer que $e^z \geq 1 + \dfrac{z^2}{2}$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+$.

En déduire que $\ln(1+y) \leq \sqrt{2y}$, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$.

(b) En utilisant la question précédente, montrer que $1 \leq f(x) \leq e^{\sqrt{2ax}}$, pour tout $x \in]0, \infty[$.

(c) Montrer que $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 1$.

(d) Montrer que f est continue en 0. [On pourra remarquer que $f(x)f(-x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.]

2. (Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^\star$) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$ et que $f'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. [Pour $x > 0$, on pourra mettre $f'(x)$ sour la forme $f(x)\varphi(x)$ et utiliser l'exercice 3.14.] Montrer que f est strictement croissante.

3. (Dérivabilité en 0 ?) Montrer que $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$. L'application f est-elle dérivable en 0 ? (Justifier la réponse...)

4. (Limites en $\pm\infty$) Donner (en fonction de a) les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f.

Dans la suite, on note l et m ces limites.

5. (Fonction réciproque) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]m, l[$. On note g la fonction réciproque de f (de sorte que g est une application de $]m, l[$ dans $\mathbb{R}$). Montrer que g est dérivable en 1 (noter que $1 \in]m, l[$) et calculer $g'(1)$. [Pour $h \neq 0$, on pourra appliquer le théorème des Accoissements Finis à la fonction f entre les points $g(1+h)$ et $g(1)$.]

6. (Régularité de la fonction réciproque) Montrer que la fonction réciproque de f est de classe C^1 sur $]m, l[$ mais que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.16 (Dérivée à droite et à gauche) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que f a une dérivée à droite en a si $\lim_{x\to a,\, x>a}(f(x) - f(a))/(x-a)$ existe (dans $\mathbb{R}$) . Cette limite est alors notée $f'_d(a)$.

1. Soit f, g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que g est dérivable en a et qu'il existe $\eta > 0$ tel que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [a, a+\eta[$. Montrer que f est dérivable à droite en a et calculer $f'_d(a)$ en fonction de g'. Donner un résultat similaire pour la dérivée à gauche.

corrigé

On remarque que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ pour tout $x \in]a, a+\eta[$. On en déduit que f à une dérivée à droite en a et que $f'_d(a) = g'(a)$.

Pour montrer la dérivabilité à gauche de f en a, il suffit de remplacer, dans l'hypothèse, "$f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [a, a+\eta[$" par "$f(x) = g(x)$ pour tout $x \in]a-\eta, a]$". On obtient alors que f est dérivable à gauche en a et que $f'_g(a) = g'(a)$.

---

2. On définit f par $f(x) = -|x| + \sqrt{x^2 + |x^2 - 1|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable à droite et à gauche aux points 1, 0 et -1. Donner les valeurs de ces dérivées.

corrigé

On remarque que

$$\begin{aligned}
&f(x) = x + \sqrt{2x^2 - 1}, \text{ si } x \leq -1,\\
&f(x) = x + 1, \text{ si } -1 \leq x \leq 0,\\
&f(x) = -x + 1, \text{ si } 0 \leq x \leq 1,\\
&f(x) = -x + \sqrt{2x^2 - 1}, \text{ si } x \geq 1.
\end{aligned}$$

La première question permet alors de conclure. Par exemple, pour montrer que f admet une dérivée à droite en 1, on utilise une fonction g définie pour $x > 1/\sqrt{2}$ par $x + \sqrt{2x^2 - 1}$. On obtient que f est dérivable à droite en 1 et que $f'_d(1) = 1$ (car $g'(x) = -1 + 2x/\sqrt{2x^2 - 1}$ pour $x > 1/\sqrt{2}$). De manière analogue, on a $f'_g(1) = f'_d(0) = -1$, $f'_g(0) = f'_d(-1) = 1$ et $f'_g(-1) = -1$.

3.6 Exercices corrigés

Exercice 3.17 (Corrigé de l'exercice 3.5)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0, \text{ si } x \leq 0,$$
$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \text{ si } x > 0.$$

Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La dérivée de f est-elle continue ?

corrigé

Sur l'intervalle ouvert $]-\infty, 0[$, la fonction f est la fonction nulle. Elle est donc dérivable et sa dérivée est aussi la fonction nulle, c'est-à-dire que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]-\infty, 0[$.

Remarque : Pour savoir si f est dérivable en 0, il est insuffisant de s'intéresser aux valeurs de $f(x)$ pour $x \leq 0$. Il faut aussi savoir comment se comporte $f(x)$ pour des $x > 0$ "voisins" de 0.

Sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$, la fonction f est formée par produit et composition de fonctions dérivables. Les propositions 3.2 et 3.3 donnent alors que f est dérivable et donnent aussi une formule pour f' :

$$f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) \text{ pour tout } x > 0.$$

Il reste maintenant à montrer que f est dérivable en 0. Pour cela, on utilise la définition de la dérivabilité en 0. Comme la fonction sin prend ses valeurs entre -1 et 1, on a, pour tout $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$,

$$|\frac{f(h) - f(0)}{h}| = |\frac{f(h)}{h}| \leq |h|.$$

On en déduit que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0,$$

et donc que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

En résumé, on a donc f dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 0 \text{ si } x \leq 0,$$
$$f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) \text{ si } x > 0.$$

La fonction f' est continue en tout point $x \neq 0$. Mais, elle n'est pas continue en 0 car $f'(0) = 0$ et on peut trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q.

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} f'(x_n) \neq 0.$$

Il suffit de prendre $x_n = 1/(2n\pi)$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$. En effet, avec ce choix de x_n, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$f'(x_n) = \frac{2}{2n\pi}\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1,$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f'(x_n) = -1 \neq 0$.

Exercice 3.18 (Corrigé de l'exercice 3.9)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable pour tout $x \in]a, b[$ (c'est-à-dire que f est dérivable pour tout $x \in]a, b[$ et que f', qui est donc définie sur $]a, b[$, est aussi dérivable pour tout $x \in]a, b[$). Soit $x_0 \in]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ t.q. :

$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) + \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2}A.$$

corrigé

Il suffit de définir de définir A par la formule suivante :

$$A = \frac{2}{(x_0 - a)(x_0 - b)}\left(f(x_0) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a)\right).$$

On obtient bien

$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) + \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2}A. \tag{3.3}$$

---

2. On définit φ sur $[a, b]$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - \frac{(x - a)(x - b)}{2}A.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, x_0[$ et $d \in]x_0, b[$ t.q. $\varphi'(c) = \varphi'(d) = 0$.

corrigé

La fonction φ est continue sur l'intervalle $[a, x_0]$ et dérivable sur l'intervalle $]a, x_0[$, on peut donc utiliser le théorème des accroissements finis (théorème 3.2). Il donne l'existence de $c \in]a, x_0[$ t.q. $\varphi(x_0) - \varphi(a) = \varphi'(c)(x_0 - a)$. Comme $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(x_0) = 0$ (par le choix de A), on a donc $\varphi'(c) = 0$.

De même, la fonction φ est continue sur l'intervalle $[x_0, b]$ et dérivable sur l'intervalle $]x_0, b[$, on peut donc utiliser le théorème des accroissements finis. Il donne l'existence de $d \in]x_0, b[$ t.q. $\varphi(x_0) - \varphi(b) = \varphi'(d)(x_0 - b)$. Comme $\varphi(b) = \varphi(x_0) = 0$, on a donc $\varphi'(d) = 0$.

---

3. Montrer qu'il existe $\theta \in]a, b[$ t.q. :

$$f(x_0) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) + \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2}f''(\theta).$$

corrigé

La fonction φ' est continue sur l'intervalle $[c,d]$ et dérivable sur l'intervalle $]c,d[$ (car $c,d \in]a,b[$ et que f' est dérivable sur $]a,b[$), on peut donc utiliser le théorème des accroissements finis. Il donne l'existence de $\theta \in]c,d[$ t.q. $\varphi''(\theta) = 0$. Or, pour tout $x \in]a,b[$, on a $\varphi''(x) = f''(x) - A$. On a donc $A = \varphi''(\theta)$. En reportant cette valeur de A dans (3.3) on obtient bien $f(x_0) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0 - a) + \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2} f''(\theta)$.

N.B. Pour les questions 2 et 3, on peut aussi utiliser la version "réduite" du théorème 3.2, c'est-à-dire le théorème de Rolle (théorème 3.1).

Exercice 3.19 (Corrigé de l'exercice 3.12)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est dérivable en tout point x différent de a et que f' (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$) admet une limite en a, notée a_1. Montrer que f est dérivable en a et que $f'(a) = a_1$. [Cette question a été faite dans un exercice précédent avec $a = 0$.]

corrigé

On veut montrer que $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = a_1$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$h \neq 0,\ |h| \leq \alpha \Rightarrow \left| \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - a_1 \right| \leq \varepsilon. \tag{3.4}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche donc α vérifiant (3.4). Comme $\lim_{x\to a} f'(x) = a_1$, il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$y \neq a,\ |y-a| \leq \alpha \Rightarrow |f'(y) - a_1| \leq \varepsilon. \tag{3.5}$$

Soit maintenant $h \neq 0$ t.q. $|h| \leq \alpha$. En appliquant le théorème des accroissements finis (théorème 3.2) à la fonction f (qui est continue sur l'intervalle fermé dont les bornes sont a et $a+h$ et dérivable sur l'intervalle ouvert dont les bornes sont a et $a+h$) il existe y strictement compris entre a et $a+h$ t.q. $f(a+h) - f(a) = hf'(y)$. Comme $|y-a| \leq |h| \leq \alpha$, on peut utiliser (3.4) et on obtient :

$$\left| \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - a_1 \right| = |f'(y) - a_1| \leq \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc bien trouvé $\alpha > 0$ vérifiant 3.5. Ceci prouve que f est dérivable en a et que $f'(a) = a_1$. Comme $\lim_{x\to a} f'(x) = a_1$, on a donc aussi montré que f' est continue en a.

---

2. On suppose que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f^{(n)}$ (définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$) admet une limite en a, notée a_n. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. [On pourra raisonner par récurrence sur n.]

corrigé

On va montrer, par récurrence sur n, que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $n = 0$, on a bien f de classe C^0 (car f est continue sur $\mathbb{R}$).

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est de classe C^n, en on va montrer que f est de classe C^{n+1}. On pose $g = f^{(n)}$. La fonction g est donc continue sur $\mathbb{R}$. Les hypothèses de la question donne aussi que g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et que $\lim_{x\to a} g'(x) = a_{n+1}$ (car $g' = f^{(n+1)}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$). On peut donc appliquer la question 1 à la fonction g. Elle donne que g est dérivable en a et que

g' est continue en a. Comme $g = f^{(n)}$, on a donc $f^{(n)}$ dérivable en a et $f^{(n+1)}$ continue en a. Les hypothèses de la question donnant aussi que $f^{(n)}$est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et que $f^{(n+1)}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, on obtient finalement que f est de classe C^{n+1}.

On a bien ainsi montré, par récurrence sur n, que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci signifie que f est de classe C^∞.

Exercice 3.20 (Corrigé de l'exercice 3.13)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ et $k \in \mathbb{R}, k > 0$. On suppose que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|^\beta$.

1. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

corrigé

On va même montrer que f est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\alpha = (\frac{\varepsilon}{k})^{\frac{1}{\beta}}$, de sorte que $\alpha > 0$ et :

$$x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|^\beta \leq k\alpha^\beta = \varepsilon.$$

Ceci montre bien que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

---

2. On suppose, dans cette question, que $\beta > 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $f'(x) = 0$. En dï¿œduire que f est constante.

corrigé

Pour $h \neq 0$, on a, en utilisant l'hypothèse sur f avec $y = x + h$, $|f(x + h) - f(x)| \leq k|h|^\beta$. On en déduit :

$$0 \leq |\frac{f(x + h) - f(h)}{h}| \leq k|h|^{\beta - 1}.$$

Comme $\beta > 1$, on a $\lim_{h \to 0} k|h|^{\beta - 1} = 0$ et donc $\lim_{h \to 0} |\frac{f(x+h) - f(h)}{h}| = 0$ (on raisonne ici avec un x fixé). Ceci prouve que $f'(x) = 0$.

On a donc montré que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En utilisant le théorème des accroissements finis, ceci implique que f est constante (voir la remarque 3.5). On rappelle ici cette démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^\star$. Le théorème des accroissements finis (théorème 3.2) donne l'existence de y entre 0 et x t.q. $f(x) - f(0) = xf'(y)$. comme $f'(y) = 0$, on a donc $f(x) = f(0)$. La fonction f est donc constante.

---

3. (Exemple) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|g(y) - g(x)| \leq |y - x|^{\frac{1}{2}}$. [On pourra montrer qu'on peut supposer $|y| \geq |x|$, et distinguer les cas où x et y sont de même signe et où x et y sont de signe contraire.]

corrigé

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. En changeant éventuellement x en y et y en x (ce qui ne change pas $|g(y) - g(x)|$ et $|y - x|$), on peut supposer $|y| \geq |x|$. En changeant éventuellement y en $-y$ et x en $-x$ (ce qui ne change toujours pas $|g(y) - g(x)|$ et $|y - x|$), on peut également supposer $y \geq 0$. On distingue maintenant 2 cas selon le signe de x.

Cas 1. On suppose ici $x \geq 0$. On a alors $|g(y) - g(x)| = \sqrt{y} - \sqrt{x}$ et $|y - x| = y - x$. On remarque alors que $(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 = y + x - 2\sqrt{y}\sqrt{x} \leq y + x - 2\sqrt{x}\sqrt{x}$ (car $\sqrt{y} \geq \sqrt{x}$) et donc $(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \leq y + x - 2x = y - x$, ce qui donne bien :

$$|g(y) - g(x)| = \sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y - x} = |y - x|^{\frac{1}{2}}.$$

Cas 2. On suppose ici $x < 0$. Comme $g(y) \geq g(x) \geq 0$, on a $|g(y) - g(x)| = g(y) - g(x) \leq g(y)$. En utilisant le premier cas précédent avec le couple $(0, y)$, on a :

$$g(y) = |g(y) - g(0)| \leq y^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $0 \leq y \leq y - x$, on a $y^{\frac{1}{2}} \leq |y - x|^{\frac{1}{2}}$ et donc :

$$|g(y) - g(x)| \leq g(y) \leq y^{\frac{1}{2}} \leq |y - x|^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 3.21 (Corrigé de l'exercice 3.14)

Soit φ une application de $]0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$, dérivable (en tout point de $]0, \infty[$) et t.q. $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$.

1. On suppose que $\varphi'(x) \leq 0$ pour tout $x > 0$. Montrer que $\varphi(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$.

corrigé

Soit $x > 0$. On veut montrer que $\varphi(x) \geq 0$.

Soit $y > x$. La fonction f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$. Le théorème des accroissemens finis donne donc l'existence de $z \in]x, y[$ t.q. $\varphi(y) - \varphi(x) = (y - x)\varphi'(z)$. Comme $\varphi'(z) \leq 0$ et $y > x$, on a donc $\varphi(x) \geq \varphi(y)$. On peut maintenant passer à la limite dans cette inégalité quand y tend vers $+\infty$ (avec x fixé) et on obtient :

$$\varphi(x) \geq \lim_{y\to\infty} \varphi(y) = 0.$$

---

2. On suppose que $\varphi'(x) < 0$ pour tout $x > 0$. Montrer que $\varphi(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

corrigé

Soit $x > 0$. En appliquant encore une fois le théorème des accroissemens finis, il existe $z \in]x, x + 1[$ t.q. $\varphi(x + 1) - \varphi(x) = \varphi'(z)$. Comme $\varphi'(z) < 0$ n a donc $\varphi(x) > \varphi(x + 1)$. Or, on sait, par la question 1, que $\varphi(x + 1) \geq 0$. On a donc $\varphi(x) > 0$.

Exercice 3.22 (Corrigé de l'exercice 3.15)

Soit $a > 0$. On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$f(x) = (1 + \tfrac{a}{|x|})^x, \text{ si } x \neq 0,$$
$$f(0) = 1.$$

(On rappelle que $b^x = e^{x \ln b}$, pour $b > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.)

1. (Continuité de f)

(a) Montrer que $e^z \geq 1 + \dfrac{z^2}{2}$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+$.
En déduire que $\ln(1+y) \leq \sqrt{2y}$, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$.

corrigé

On pose, pour $z \in \mathbb{R}$, $g(z) = e^z - 1 - \frac{z^2}{2}$. La fonction g est de classe C^∞ et on a $g'(z) = e^z - z$, $g''(z) = e^z - 1$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Comme $g''(z) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+$, la fonction g' est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (d'après le troisième item de la remarque 3.5). On a donc $g'(z) \geq g'(0) = 1 \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+$. La fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ (toujours par le troisième item de la remarque 3.5), ce qui donne $g(z) \geq g(0) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+$. Ce qui donne bien :

$$e^z \geq 1 + \frac{z^2}{2} \text{ pour tout } z \in \mathbb{R}_+.$$

Soit $y \in \mathbb{R}_+$. On applique l'inégalité précédente avec $z = \sqrt{2y} \in \mathbb{R}_+$, on obtient que $e^{\sqrt{2y}} \geq 1 + y$. Comme la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, on obtient :

$$\sqrt{2y} \geq \ln(1+y).$$

(b) En utilisant la question précédente, montrer que $1 \leq f(x) \leq e^{\sqrt{2ax}}$, pour tout $x \in]0, \infty[$.

corrigé

Soit $x > 0$. Comme $f(x) = e^{x \ln(1+\frac{a}{x})}$, on a $f(x) \geq 1$ (car $x \ln(1+\frac{a}{x}) > 0$) et, en utilisant la question précédente avec $y = \frac{a}{x}$, $f(x) \leq e^{x\sqrt{2\frac{a}{x}}} = e^{\sqrt{2ax}}$.

(c) Montrer que $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 1$.

corrigé

En passant à limite, quand $x \to 0$ avec $x > 0$, dans l'inégalité $1 \leq f(x) \leq e^{\sqrt{2ax}}$, on obtient que $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 1$.

(d) Montrer que f est continue en 0. [On pourra remarquer que $f(x)f(-x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.]

corrigé

Comme $f(x) = \frac{1}{f(-x)}$ pour tout $x < 0$, on a (avec la question précédente) :

$$\lim_{x\to 0,\, x<0} f(x) = \frac{1}{\lim_{x\to 0,\, x>0} f(x)} = 1.$$

On a donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, et, comme $f(0) = 1$, on en déduit que f est continue en 0.

---

2. (Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^\star$) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$ et que $f'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. [Pour $x > 0$, on pourra mettre $f'(x)$ sour la forme $f(x)\varphi(x)$ et utiliser l'exercice 3.14.] Montrer que f est strictement croissante.

corrigé

Pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $f(x) = e^{x \ln(1+\frac{a}{x})}$. On en déduit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^\star$ comme composée de fonctions de classe C^1 (on a même f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^\star$).

De même, pour $x \in \mathbb{R}_-^\star$, on a $f(x) = e^{x \ln(1-\frac{a}{x})}$. On en déduit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-^\star$ comme composée de fonctions de classe C^1. La fonction f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$.

Pour $x > 0$, on a $f'(x) = f(x)\varphi(x)$ avec :

$$\varphi(x) = \ln(1 + \frac{a}{x}) - \frac{a}{a+x}.$$

En tout point de $\mathbb{R}_+^\star$, φ est dérivable et on a, pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\varphi'(x) = -\frac{a}{x(a+x)} + \frac{a}{(a+x)^2} = -\frac{a^2}{x(a+x)^2} < 0.$$

De plus, on a $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$. Avec l'exercice 3.14, on en déduit que $\varphi(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Comme $f'(x) = f(x)\varphi(x)$ et que $f(x) > 0$, on a donc aussi $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. En utilisant le quatrième item de la remarque 3.5, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $x \in \mathbb{R}_-^\star$ on a $f(x) = \frac{1}{f(-x)}$. On a donc f dérivable sur $\mathbb{R}_-^\star$ et $f'(x) = \frac{f'(-x)}{f(-x)^2}$ (pour tout $x < 0$). On a donc aussi $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$, ce qui donne que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$. Finalement, on a bien montré que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

---

3. (Dérivabilité en 0 ?) Montrer que $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$. L'application f est-elle dérivable en 0 ? (Justifier la réponse...)

corrigé

En reprenant la fonction φ introduite à la question précédente, on a $\lim_{x\to 0,\, x>0} \varphi(x) = +\infty$. Comme $f'(x) = f(x)\varphi(x)$ pour tout $x > 0$ et que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, on en déduit :

$$\lim_{x\to 0,\, x>0} f'(x) = +\infty.$$

Comme $f'(x) = \frac{f'(-x)}{f(-x)^2}$ pour tout $x < 0$, on a aussi $\lim_{x\to 0,\, x<0} f'(x) = +\infty$. On a donc $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$.

On va montrer maintenant que $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = +\infty$ (ce qui prouve bien que f n'est pas dérivable en 0).

Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$, il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$x \neq 0,\ |x| \le \alpha \Rightarrow f'(x) \ge M.$$

Soit $h \neq 0$, $|h| \le \alpha$. En appliquant le théorème des accroissements finis (théorème 3.2) à la fonction f sur l'intervalle dont les bornes sont 0 et h, il existe x strictement entre 0 et h t.q. $f(h) - f(0) = hf'(x)$. Comme $x \neq 0$ et $|x| < |h| \le \alpha$, on a $f'(x) \ge M$ et donc :

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(x) \ge M.$$

On a donc :

$$h \neq 0,\ |h| \le \alpha \Rightarrow \frac{f(h) - f(0)}{h} \ge M.$$

Ceci prouve que $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = +\infty$ et donc que f n'est pas dérivable en 0.

---

4. (Limites en $\pm\infty$) Donner (en fonction de a) les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f.

corrigé

Pour $y \in]-\frac{1}{a}, +\infty[$, on pose $\psi(y) = \ln(1 + ay)$. |a fonction ψ est dérivable et $\psi'(y) = \frac{a}{1+ay}$. On a donc, en particulier :

$$\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1 + ay)}{y} = \psi'(0) = a.$$

On a donc (en posant $y = \frac{1}{x}$) $\lim_{x\to+\infty} x \ln(1 + \frac{a}{x}) = a$. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^a$.

Comme $f(x) = \frac{1}{f(-x)}$, on a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{\lim_{x\to+\infty} f(x)} = e^{-a}$.

Dans la suite, on note l et m ces limites.

corrigé

On a donc $l = e^a$ et $m = e^{-a}$

---

5. (Fonction réciproque) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]m, l[$. On note g la fonction réciproque de f (de sorte que g est une application de $]m, l[$ dans $\mathbb{R}$). Montrer que g est dérivable en 1 (noter que $1 \in]m, l[$) et calculer $g'(1)$. [Pour $h \neq 0$, on pourra appliquer le théorème des Accoissements Finis à la fonction f entre les points $g(1 + h)$ et $g(1)$.]

corrigé

La fonction f est continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ses limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont l et m. Le théorème 2.5 donne alors que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]m, l[$ et que sa fonction réciproque, notée g, est continue strictement croissante de $]m, l[$ dans $\mathbb{R}$.

On va montrer maintenant que g est dérivable en 1 et que $g'(1) = 0$, c'est-à-dire que

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(1 + h) - g(1)}{h} = 0.$$

L'idée principale est de remarquer que, pour $h \neq 0$ (et t.q. $1 + h \in]m, l[$), on a :

$$\frac{g(1 + h) - g(1)}{h} = \frac{\tau}{f(\tau) - f(0)},$$

avec $\tau = g(1+h)-g(1) = g(1+h)$ (car $g(1) = 0$ puisque $f(0) = 1$) et donc $f(\tau) = 1+h = f(0)+h$. (Noter aussi que $\tau \neq 0$ car g est injective).

Comme g est continue, on a $\lim_{h\to 0} g(1 + h) - g(1) = 0$. Pour montrer que $\lim_{h\to 0} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = 0$, il suffit donc de montrer que $\lim_{\tau\to 0} \frac{\tau}{f(\tau)-f(0)} = 0$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$\tau \neq 0,\ |\tau| \leq \alpha \Rightarrow |\frac{\tau}{f(\tau) - f(0)}| \leq \varepsilon. \tag{3.6}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\alpha > 0$ satisfaisant (3.6). Comme $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$, il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x \neq 0,\ |x| \leq \alpha \Rightarrow f'(x) \geq \frac{1}{\varepsilon}. \tag{3.7}$$

Soit $\tau \neq 0$ t.q. $|\tau| \leq \alpha$. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle dont les bornes sont 0 et τ. Il donne l'existence de z strictement entre 0 et τ t.q.

$f(\tau) - f(0) = \tau f'(z)$. On a donc $\frac{\tau}{f(\tau)-f(0)} = \frac{1}{f'(z)}$. Comme $f'(z) \geq \frac{1}{\varepsilon} > 0$ (grâce à (3.7) car $|z| \leq |\tau| \leq \alpha$), on a donc $0 < \frac{\tau}{f(\tau)-f(0)} \leq \varepsilon$.

ce qui donne :

$$|\frac{\tau}{f(\tau) - f(0)}| \leq \varepsilon.$$

On a donc trouvé $\alpha > 0$ satisfaisant (3.6). Ce qui prouve que g est dérivable en 1 et $g'(1) = 0$.

---

6. (Régularité de la fonction réciproque) Montrer que la fonction réciproque de f est de classe C^1 sur $]m, l[$ mais que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

corrigé

La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$ (mais pas sur $\mathbb{R}$ car f n'est pas dérivable en 0) et f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^\star$ (on a montré que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$). On en déduit que la fonction réciproque de f, notée g, est de classe C^1 sur $\{f(x),\ x \in \mathbb{R}^\star\}$, c'est-à-dire sur $]m, 1[\cup]1, l[$. Plus précisément, pour tout $y \in]m, 1[\cup]1, l[$, on a :

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Comme g est continue sur $]m, l[$ et que f' est continue et non nulle sur $\mathbb{R}^\star$, on en déduit bien que g' est continue sur $]m, 1[\cup]1, l[$ (noter que $g(y) \neq 0$ si $y \neq 0$ car g est injective). Dans la question 6, on a montré que g est dérivable en 1 et que $g'(1) = 0$. Pour montrer que g est de classe C^1 sur $]m, l[$, il reste donc seulement à montrer que g' est continue en 1. Or, comme $\lim_{y \to 1} g(y) = g(1) = 0$, on a :

$$\lim_{y \to 1} g'(y) = \lim_{y \to 1} \frac{1}{f'(g(y))} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{f'(x)} = 0.$$

Ce qui prouve la continuité de g' en 1. On a bien, finalement, montré que g est de classe C^1 sur $]m, l[$.

Exercice 3.23 (Points fixes de f, si $f \circ f = f$)

Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. On rappelle que $x \in [a, b]$ est un point fixe de f si $f(x) = x$.

1. Montrer que f admet au moins un point fixe. [On pourra considérer la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - x$.]

corrigé

On remarque que $g(a) = f(a) - a \geq 0$ (car $f(a) \geq a$) et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ (car $f(b) \leq b$). Comme g est continue sur $[a, b]$ et $g(a) \geq 0 \geq g(b)$, le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence de $c \in [a, b]$ t.q. $g(c) = 0$.

On suppose dans la suite que $f \circ f = f$. On pose $\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in [a, b]\}$.

2. Montrer que tout élément de $\mathrm{Im}(f)$ est un point fixe de f.

corrigé

Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $x \in [a, b]$ t.q. $y = f(x)$. On a donc $f(y) = f(f(x)) = f \circ f(x) = f(x) = y$. Ce qui prouve que y est un point fixe de f.

---

3. On suppose, dans cette question, que f admet un seul point fixe. Montrer que f est constante.

corrigé

Puisque f admet un seul point fixe, la question précédente donne que $\mathrm{Im}(f)$ ne peut contenir que un seul point. Ce qui prouve que f est constante.

On suppose dans la suite que f admet au moins 2 points fixes (disctints) et que f est dérivable (c'est-à-dire dérivable en tout point de $]a,b[$).

4. Montrer qu'il existe $m, M \in [a,b]$ t.q. $\mathrm{Im}(f) = [m,M]$ et $m < M$.

corrigé

L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est encore un intervalle fermé borné. Il existe donc $m, M \in \mathbb{R}$ t.q. $m \leq M$ et $\mathrm{Im}(f) = [m,M]$. Comme f admet au moins 2 points fixes, $\mathrm{Im}(f)$ contient au moins deux points. Donc, $m < M$.

---

5. Montrer que $f'(x) = 1$ pour tout $x \in]m,M[$ (ici et dans la suite, m et M sont donnés par la question précédente).

corrigé

Pour tout $x \in]m,M[$, on a $f(x) = x$ (car $]m,M[\subset \mathrm{Im}(f)$). On a donc, pour tout $x \in]m,M[$, $f'(x) = 1$.

---

6. On suppose, dans cette question, que $m > a$.

   (a) Montrer que $f'(m) = 1$.

   corrigé

   On a $a < m < M \leq b$. La fonction f est donc dérivable en m. Pour $0 < h < M - m$, on a $f(m)$=m et $f(m+h) = m+h$ (car m et $(m+h)$ sont dans $\mathrm{Im}(f)$ et sont donc des points fixes de f). On a donc :

   $$\frac{f(m+h) - f(m)}{h} = 1.$$

   On en déduit que :

   $$f'(m) = \lim_{h \to 0} \frac{f(m+h) - f(m)}{h} = \lim_{h \to 0, h > 0} \frac{f(m+h) - f(m)}{h} = 1.$$

   (b) Montrer qu'il existe $x \in]a,m[$ t.q. $f(x) < m$.

   corrigé

   Comme f est dérivable en m et que $f'(m) = 1$, on a $f(x) = f(m) + (x-m) + (x-m)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to m} \varepsilon(x) = 0$. Il existe donc $\eta > 0$ t.q. :

   $$|x - m| \leq \eta \Rightarrow |\varepsilon(x)| < 1.$$

   Pour $x \in [a,m[$ avec $m - x < \eta$ on a donc :

   $$f(x) < f(m) + (x-m) + |x-m| = f(m).$$

(c) En déduire que l'hypothèse $m > a$ est en contradiction avec la définition de m.

corrigé

Si $m > a$, on vient de montrer l'existence de $x \in [a, b]$ t.q. $f(x) < f(m)$, ce qui impossible car $f(x) \in \mathrm{Im}(f) = [m, M]$ et $f(m) = m$ (car $m \in \mathrm{Im}(f)$ et donc m est un point fixe de f).

7. Montrer que $m = a$, $M = b$ et $f(x) = x$ pour tout $x \in [a, b]$.

corrigé

La question précédente donne $m \leq a$ et donc finalement $m = a$ (car $[m, M] = \mathrm{Im}(f) \subset [a, b]$). De manière analogue, on peut montrer que $M = b$. On a donc $\mathrm{Im}(f) = [a, b]$ et donc $f(x) = x$ pour tout $x \in [a, b]$.

8. Montrer que le résultat de la question précédente peut être faux si on retire l'hypothèse "f dérivable". [On cherche donc f continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ t.q. $f \circ f = f$, f admet au moins deux points fixes distincts et il existe $x \in [a, b]$ t.q. $f(x) \neq x$.]

corrigé

On peut prendre, par exemple, $a = 0$, $b = 3$, $f(x) = 1$ si $0 \leq x < 1$, $f(x) = x$ si $1 \leq x \leq 2$, $f(x) = 2$ si $2 < x \leq 3$.

Exercice 3.24 (Calcul de limites)

Calculer $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{2x}}{x}$ et $\lim_{x\to 0, x>0} \frac{x}{(\ln(1+x))^2}$.

corrigé

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ car $|\frac{\sin(x)}{x}| \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $fx) = e^x - e^{2x}$. La fonction f est dérivable en 0 et $f(0) = 0$. On en déduit $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{2x}}{x} = f'(0) = -1$.

Pour $x \in]-1, \infty[$,, on pose $g(x) = \ln(1 + x)^2$. La fonction g est dérivable en 0 et $g(0) = 0$. On en déduit $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)^2}{x} = g'(0) = 0$. Comme $g(x) > 0$ quand $x > 0$, on a donc $\lim_{x\to 0, x>0} \frac{x}{(\ln(1+x))^2} = +\infty$.

Exercice 3.25 (Fonction sous linéaire)

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et t.q. $f(0) = 0$. On définit la fonction g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ (avec $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$) par :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ si } x > 0,$$

$$g(0) = f'(0).$$

1. Montrer que g est continue en tout point de $\mathbb{R}_+$.

corrigé

La fonction g est continue sur $]0, \infty[$ car c'est le quotient de deux fonctions continues et que son dénominateur ne s'annule par (sur $]0, \infty[$). On peut aussi noter que g est dérivable sur $]0, \infty[$

Comme f est dérivable en 0 et que $f(0) = 0$, On a $\lim_{x\to 0, x>0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$. La fonction g est donc continue en 0 (et donc continue sur tout $\mathbb{R}+ = [0, \infty[$).

On suppose maintenant qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, t.q., pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq \alpha x + \beta$.

2. Montrer que g est majorée (c'est-à-dire que l'ensemble $\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$ est majoré)

corrigé

La fonction g est continue sur $[0,1]$. La restriction de g à $[0,1]$ est donc majorée (car $[0,1]$ est fermé et borné). Il existe donc M t.q., pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \le M$.

Puis, pour $x > 1$, on remarque que $g(x) \le \alpha + \frac{\beta}{x} \le \alpha + |\beta|$. On a donc finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \le C = \max\{M, \alpha + |b|\}$, ce qui prouve que g est majorée.

---

3. On suppose, dans cette question, que $\alpha < f'(0)$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$. Montrer que $g(a) = f'(a)$.

corrigé

On choisit $\varepsilon = f'(0) - \alpha > 0$, et on pose $A = \frac{|\beta|}{\varepsilon} \ge 0$. Pour $x \ge A$, on a donc $g(x) \le \alpha + \frac{\beta}{x} \le \alpha + \varepsilon = f'(0)$.

La fonction g est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, A]$, il existe donc $a \in [0, A] \subset \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in [0, A]\}$. Mais, comme $\sup\{g(x),\ x \in [0, A]\} \ge g(0) = f'(0)$ et que pour $x > A$ on a $g(x) \le f'(0)$, on a donc $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$.

Si $a = 0$, on a bien $g(a) = f'(a)$. Si $a > 0$, le fait que $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$ et que g soit dérivable en a permet de montrer que $g'(a) = 0$ (comme dans la démonstration du théorème des accroissements finis). Comme $xg(x) = f(x)$ pour tout $x > 0$, on a $g(x) + xg'(x) = f'(x)$ pour tout $x > 0$ et donc $g(a) = f'(a)$.

---

4. On suppose, dans cette question, que $f(x) = x - \frac{x^3}{1+x^2}$.

   (a) La fonction f vérifie-t-elle les hypothèses données au début de l'exercice ?

   corrigé

   Oui... f est dérivable et $f(0) = 0$.

   (b) Donner des valeurs de α et β pour lesquelles, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \le \alpha x + \beta$.

   corrigé

   Comme $\frac{x^3}{1+x^2} \ge 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, les valeurs suivantes conviennent : $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

   (c) Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$ et donner cette valeur de a.

   corrigé

   On a $g(x) < 1$, pour tout $x \in]0, \infty[$, et $g(0) = 1$. Il existe donc un unique $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\} (= 1)$ et $a = 0$.

   ---

5. On suppose, dans cette question, que $\alpha = f'(0)$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$ et que $g(a) = f'(a)$.

corrigé

On pose $\gamma = \sup\{g(x),\ x \in \mathbb{R}_+\}$. On a $\gamma \ge g(0) = f'(0)$ et donc distingue deux cas ;

Premier cas : $\gamma = f'(0)$. Dans ce cas, $a = 0$ convient car $g(0) = f'(0) = \gamma$.

Deuxième cas : $\gamma > f'(0)$.

On choisit alors $\varepsilon = \frac{\gamma - f'(0)}{2} > 0$, et on pose $A = \frac{|\beta|}{\varepsilon} \geq 0$. Pour $x \geq A$, on a donc $g(x) \leq \alpha + \frac{\beta}{x} \leq \alpha + \varepsilon = f'(0) + \varepsilon = \frac{\gamma + f'(0)}{2} < \gamma$. On a donc $\sup\{g(x),\, x \in [A, \infty[\} < \gamma$ et donc :

$$\gamma = \sup\{g(x), x \in \mathbb{R}_+\} = \sup\{g(x), x \in [0, A]\}.$$

La fonction g est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, A]$, il existe donc $a \in [0, A] \subset \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\, x \in [0, A]\}$. Ce qui donne bien $g(a) = \gamma$.

La démonstration de $g(a) = f'(a)$ est identique à celle de la question 3.

---

6. Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenable f) qu'il peut ne pas exister $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$ (pour cet exemple, on aura donc nécessairement $\alpha > f'(0)$).

corrigé

On peut prendre, par exemple, f définie par $f(x) = x + \frac{x^3}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a bien f dérivable, $f(0) = 0$. Comme $\frac{x^2}{1+x^2} < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, les valeurs $\alpha = 2$ et $\beta = 0$ conviennent et on a $g(x) < 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Enfin, on a $\lim_{x\to\infty} g(x) = 2$. on en déduit que $\sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$ =2 et qu'il n'existe pas d'élément a de $\mathbb{R}_+$ t.q. $g(a) = \sup\{g(x),\, x \in \mathbb{R}_+\}$.

Exercice 3.26 (TAF. . .)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable pour tout $x \neq 0$ et que $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$.

1. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

corrigé

On va montrer que $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \infty$ (ce qui prouve que f n'est pas dérivable en 0), c'est-à-dire que pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$h \neq 0,\ |h| \leq \alpha \Rightarrow \frac{f(h) - f(0)}{h} \geq M. \tag{3.8}$$

Soit donc $M \in \mathbb{R}$. Comme $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$. il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$x \neq 0,\ |x| \leq \alpha \Rightarrow f'(x) \geq M. \tag{3.9}$$

Soit maintenant $h \neq 0$ avec $|h| \leq \alpha$, le théorème des accroissements finis (théorème 3.2) donne l'existence de $c \in]\min(0, h), \max(0, h)[$ t.q. :

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(c).$$

Comme $|h| \leq \alpha$, on a $c \in]-\alpha, \alpha[$ et, comme $c \neq 0$, (3.9) donne $f'(c) \geq M$, on a donc $\frac{f(h)-f(0)}{h} \geq M$.

On a bien ainsi montré que pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha > 0$ vérifiant (3.8). Ceci montre que $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = +\infty$ et donc que f n'est pas dérivable en 0.

---

2. On suppose maintenant que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement croissante et que $f(0) = 0$. On note g la fonction réciproque de f [l'existence de la function g a été vue en cours]. Montrer que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 0$.

   corrigé

   On reprend ici essentiellement la démonstration faite en cours pour montrer la dérivabilité d'une fonction réciproque.

   On veut montrer que $\lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} = 0$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\beta > 0$ t.q. :

   $$h \neq 0,\ |h| \leq \beta \Rightarrow |\frac{g(h) - g(0)}{h}| \leq \varepsilon. \tag{3.10}$$

   Soit $h \neq 0$. Comme $f \circ g(h) = h$, $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$ (noter que $g(h) \neq 0$ car $h \neq 0$ et g injective), on a :

   $$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{g(h)}{f(g(h)) - f(0)}.$$

   Le théorème des accroissements finis donne l'existence de $d \in]\min(0, g(h)), \max(0, g(h))[$ t.q. :

   $$f(g(h)) - f(0) = g(h)f'(d)$$

   (bien sûr, le point d dépend de h). On a donc :

   $$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{1}{f'(d)}. \tag{3.11}$$

   Cette égalité, avec (3.9) et la continuité de g (qui a été vue en cours) nous suggère le choix de β, à partir de ε, pour avoir (3.10). En effet, soit $\varepsilon > 0$. On choisit $M = 1/\varepsilon$. Il existe alors $\alpha > 0$ vérifiant (3.9). Mais, comme g est continue en 0, il existe $\beta > 0$ t.q. :

   $$y \in \mathbb{R},\ |y| \leq \beta \Rightarrow |g(y)| \leq \alpha.$$

   Si $|h| \leq \beta$, on a donc $|g(h)| \leq \alpha$. Ce qui donne $d \in]-\alpha, \alpha[$ et donc (comme on a aussi $d \neq 0$), $f'(d) \geq M = 1/\varepsilon > 0$. Finalement, on obtient avec (3.11),

   $$|\frac{g(h) - g(0)}{h}| = \frac{g(h) - g(0)}{h} \leq \varepsilon.$$

   Pour tout $\varepsilon > 0$ on a donc trouvé β vérifiant (3.10). Ce qui prouve que g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

Exercice 3.27

Etudier l'existence et la valeur d'une limite éventuelle en x_0 pour les fonctions suivantes.

- $f_1(x) = \frac{x+|x|}{x}$, pour $x \neq 0$, et $x_0 = 0$,
- $f_2(x) = (\frac{\pi}{2} - x) \tan x$, pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$, et $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

corrigé

La limite à gauche de f_1 en 0 est 0 et la limite à droite est 2. Donc, f n'a pas de limite en 0 pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$, on a :

$$f_2(x) = \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos(x) - \cos(\frac{\pi}{2})} \sin(x).$$

Comme $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) - \cos(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, on en déduit :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f_2(x) = 1.$$

Exercice 3.28

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes. Montrer qu'elles sont dérivables et donner une expression de leur dérivée.

- $f_1(x) = x^{\frac{1}{x}}$,
- $f_2(x) = \ln(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)})$.

corrigé

La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ et est dérivable comme composée de fonctions dérivables. Comme $f_1(x) = e^{\ln(x)/x}$, on a, pour tout $x > 0$:

$$f_1'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln(x))x^{\frac{1}{x}}.$$

La fonction f_2 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Elle est dérivable comme composée de fonctions dérivables et on trouve, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $f_2'(x) = \frac{2}{\cos(x)}$.

Exercice 3.29

En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que $1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x$, pour tout $x > 0$.

corrigé

Soit $x > 0$. Comme la fonction $y \mapsto e^y$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, le théorème des accroissements finis donne l'existence de $c \in]0, x[$ t.q. $e^x - e^0 = xe^c$. On a donc :

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^c.$$

Comme la fonction $y \mapsto e^y$ est strictement croissante, on a $1 = e^0 < e^c < e^x$ (car $0 < c < x$) et donc :

$$1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x.$$

Exercice 3.30 (Fonction convexe)

Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que φ est dérivable (c'est-à-dire dérivable en tout point de $\mathbb{R}$) et que φ' est une fonction croissante.

1. Soit $x < z < y$. Montrer que $\frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{z-x} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z}$.

corrigé

La fonction φ est continue sur $[x,z]$ et dérivable sur $]x,z[$, le théorème des accroissements finis (théorème 3.2) donne l'existence de $c \in]x,z[$ t.q.

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{z-x} = \varphi'(c).$$

De même, le théorème des accroissements finis donne l'existence de $d \in]z,y[$ t.q.

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z} = \varphi'(d).$$

Comme φ' est croissante et $c < z < d$, on a $\varphi'(c) \leq \varphi'(d)$ et donc $\frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{z-x} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z}$.

2. Montrer que φ est convexe, c'est-à-dire que

$$\varphi(tx+(1-t)y) \leq t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y) \text{ pour tout } x,y \in \mathbb{R} \text{ et tout } t \in [0,1]. \tag{3.12}$$

[Pour $x < y$ et $t \in]0,1[$, on pourra utiliser la question 1 avec $z = tx+(1-t)y$.]

corrigé

L'inégalité (3.12) est immédiate pour $x = y$. Elle est aussi immédiate pour $x \neq y$ et $t = 0$ ou $t = 1$. Il reste à étudier le cas $x \neq y$ et $t \in]0,1[$. On peut aussi supposer $x < y$ (quitte à changer x en y, y en x et t en $1-t$).

On applique alors la question 1 avec $z = tx+(1-t)y$, de sorte que $z - x = (1-t)(y-x)$ et $y - z = t(y-x)$. On obtient

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{(1-t)(y-x)} = \frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{z-x} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z} = \frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{t(y-z)}.$$

Ce qui donne, comme $y - x > 0$, $t > 0$ et $(1-t) > 0$,

$$t(\varphi(z)-\varphi(x)) \leq (1-t)(\varphi(y)-\varphi(z)).$$

On en déduit bien l'inégalité (3.12).

3. On définit ici la fonction ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = |x|$ si $x \in \mathbb{R}$. Montrer que ψ est convexe. La fonction ψ est-elle dérivable en tout point de $\mathbb{R}$?

corrigé

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$, on a

$$\psi(tx+(1-t)y) = |tx+(1-t)y| \leq t|x| + (1-t)|y| = t\psi(x) + (1-t)\psi(y).$$

Ce qui montre bien que ψ est convexe. La fonction ψ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 3.31 (Recherche d'un maximum et convexité)

Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\varphi(\frac{x+y}{2}) \le \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(y) \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

(Noter que φ n'est pas nécessairement dérivable.)

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(a) = \max\{\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}\}$. (On a donc $\varphi(a) \ge \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.)

   (a) Soit $\theta \ne 0$. Montrer que

   $$\varphi(a) \le \frac{1}{2}\varphi(a+\theta) + \frac{1}{2}\varphi(a-\theta), \ \ \varphi(a+\theta) \le \varphi(a) \ \text{ et } \ \varphi(a-\theta) \le \varphi(a).$$

   Montrer que $\varphi(a+\theta) = \varphi(a-\theta) = \varphi(a)$.

   corrigé

   On remarque que $a = \frac{1}{2}(a+\theta) + \frac{1}{2}(a-\theta)$. L'inégalité (3.13) donne donc $\varphi(a) \le \frac{1}{2}\varphi(a+\theta) + \frac{1}{2}\varphi(a-\theta)$. Puis, comme $\varphi(a) = \max\{\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}\}$, on a, bien sûr, $\varphi(a+\theta) \le \varphi(a)$ et $\varphi(a-\theta) \le \varphi(a)$.

   En utilisant ces trois inégalités, on remarque que

   $$\varphi(a) \le \frac{1}{2}\varphi(a+\theta) + \frac{1}{2}\varphi(a-\theta) \le \frac{1}{2}\varphi(a+\theta) + \frac{1}{2}\varphi(a).$$

   On a donc $\frac{1}{2}\varphi(a) \le \frac{1}{2}\varphi(a+\theta) \le \frac{1}{2}\varphi(a)$. Ce qui donne bien $\varphi(a+\theta) = \varphi(a)$. De même on a $\varphi(a-\theta) = \varphi(a)$ (par exemple en changeant θ en $-\theta$).

   (b) Montrer que $\varphi(x) = \varphi(a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (la fonction φ est donc constante).

   corrigé

   Soit $x \ne a$. On pose $\theta = x - a$. La question précédente donne $\varphi(x) = \varphi(a+\theta) = \varphi(a)$. La fonction φ est donc constante.

   ---

2. On s'intéresse maintenant à une situation un peu plus compliquée. Soit g une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $f = \varphi + g$ et on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $f(a) = \max\{f(x),\ x \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Soit $h \ne 0$.

      i. Montrer que $\varphi(a+h) - \varphi(a) \le g(a) - g(a+h)$.

      corrigé

      On remarque que $\varphi(a+h) + g(a+h) = f(a+h) \le f(a) = \varphi(a) + g(a)$. on a donc $\varphi(a+h) - \varphi(a) \le g(a) - g(a+h)$.

      ---

      ii. Montrer que $\varphi(a+h) - \varphi(a) \ge g(a-h) - g(a)$.

      corrigé

      La question précédente, changeant h en $-h$, donne $\varphi(a-h) - \varphi(a) \le g(a) - g(a-h)$. Ce qui peut s'écrire

      $$\varphi(a) - \varphi(a-h) \ge g(a-h) - g(a).$$

Or l'inégalité (3.13) donne

$$\frac{1}{2}\varphi(a) + \frac{1}{2}\varphi(a) \leq \frac{1}{2}\varphi(a+h) + \frac{1}{2}\varphi(a-h).$$

On a donc $\varphi(a+h) - \varphi(a) \geq \varphi(a) - \varphi(a-h)$ et, finalement, on obtient bien

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) \geq \varphi(a) - \varphi(a-h) \geq g(a-h) - g(a).$$

(b) Montrer que φ est dérivable en a et que $\varphi'(a) = -g'(a)$. [On pourra commencer par calculer, en fonction de $g'(a)$, la limite de $(g(a-h) - g(a))/h$ quand h tend vers 0.]

corrigé

Comme $\frac{g(a-h)-g(a)}{h} = -\frac{g(a-h)-g(a)}{-h}$, on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(a-h) - g(a)}{h} = -g'(a).$$

La question précédente donne, pour tout $h > 0$,

$$\frac{g(a-h) - g(a)}{h} \leq \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} \leq -\frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

et, pour tout $h < 0$,

$$\frac{g(a-h) - g(a)}{h} \geq \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} \geq -\frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

Comme $\lim_{h\to 0} \frac{g(a-h)-g(a)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = -g'(a)$, on en déduit que φ est dérivable en a et que $\varphi'(a) = -g'(a)$.

N.B. On a donc montré que φ est nécessairement dérivable au point où f atteint son maximum.

3. (Exemple) On définit ici φ et g par $\varphi(x) = |x|$ et $g(x) = -x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$. On pose $f = \varphi + g$. Donner les deux points $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $f(a) = f(b) = \max\{f(x),\, x \in \mathbb{R}\}$. [On pourra commencer par dessiner la courbe de f.]

corrigé

La fonction f est paire. On l'étudie sur $\mathbb{R}_+$. On a $f(x) = x(1-x)$ pour $x \geq 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ puis strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$. On en déduit que les points a et b sont les points $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

Exercice 3.32 (Récurrence sur TAF)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On suppose que f s'annule en trois points distincts a, b, c, avec $a < b < c$.

(a) Montrer qu'il existe des réels d et e, avec $d \in]a, b[$, $e \in]b, c[$ et $f'(d) = f'(e) = 0$.

corrigé

Pour obtenir l'existence de d, on applique le théorème de Rolle à la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ (la fonction f est bien continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$). De même, pour obtenir l'existence de e, on applique le théorème de Rolle à la fonction f sur l'intervalle $[b, c]$.

(b) Montrer que f'' s'annule en au moins un point de $\mathbb{R}$.

corrigé

On applique le théorème de Rolle à la fonction f' sur l'intervalle $[d,e]$ (la fonction f' est bien continue sur $[d,e]$ et dériable sur $]d,e[$). Il donne l'existence de $z \in]d,e[\subset \mathbb{R}$ t.q. $f''(z) = 0$.

2. Soient $n \geq 1$ un entier naturel et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}$. On suppose que g s'annule en $n+1$ points distincts $a_1 < \ldots < a_{n+1}$. Montrer que la dérivée n-ème $g^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

corrigé

On montre ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.

Initialisation. Pour $n = 1$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 2 points distincts $a_1 < a_2$. On peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction g sur l'intevalle $[a_1, a_2]$. On obtient l'existence de $z \in]a_1, a_2[$ t.q. $g'(z) = 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose (c'est l'hypothèse de récurrence) que toute fonction h de classe C^n qui s'annule en $n+1$ points distincts a une dérivée n-ème qui s'annule au moins une fois. Soit maintenant g une fonction de classe C^{n+1} qui s'annule en $n+2$ points distincts $a_1 < \ldots < a_{n+2}$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction g sur l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ (pour $i \in \{1, n+1\}$), on obtient l'existence de $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ t.q. $g'(b_i) = 0$. La fonction g' est donc de classe C^n et s'annule (au moins) en $n+1$ points distints (les points $b_1, \ldots, b_{n+1}$). On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à ma fonction g', elle donne que la dérivée n-ème de g' s'annule au moins une fois. On en déduit que la dérivée $(n+1)$-ème de g s'annule au moins une fois. Ce qui termine la récurrence.

Chapitre 4

Formules de Taylor et développements limités

4.1 Taylor-Lagrange

Si $a, b \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{Int}(a,b)$ l'intervalle ouvert dont les bornes sont a et b, c'est-à-dire $\mathrm{Int}(a,b) =]a,b[$ si $a \le b$ et $\mathrm{Int}(a,b) =]b,a[$ si $b < a$.

Théorème 4.1 (Taylor-Lagrange) *Soit $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$ et f une application de $]\alpha,\beta[$ dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f de classe C^n et que $f^{(n)}$ dérivable. Soit $a, b \in]\alpha,\beta[$. Alors, il existe $c \in \mathrm{Int}(a,b)$ t.q.*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \tag{4.1}$$

On rappelle que, par convention, $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $0! = 1$.
Démonstration : La démonstration de ce théorème consiste à appliquer le théorème des accroissements finis (ou, plus simplement, le théorème 3.1) à une fonction convenablement choisie.
On pose

$$d = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right),$$

de sorte que $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} d$. Il s'agit maintenant de démontrer qu'il existe $c \in \mathrm{Int}(a,b)$ t.q. $d = f^{(n+1)}(c)$.
Pour $x \in]\alpha,\beta[$, on pose

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} d.$$

On remarque que $\varphi(a) = f(b)$ (grâce au choix de d) et $\varphi(b) = f(b)$. La fonction φ est dérivable sur $]\alpha,\beta[$

et on a, pour tout $x \in]\alpha, \beta[$,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} d \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} d = \frac{(b-x)^n}{n!} (f^{(n+1)}(x) - d).\end{aligned}$$

On utilise maintenant le théorème 3.1 (théorème de Rolle). La fonction φ est continue sur l'intervalle fermé dont les bornes sont a et b et dérivable sur l'intervalle ouvert dont les bornes sont a et b (c'est-à-dire sur l'intervalle $\mathrm{Int}(a,b)$). Comme $\varphi(a) = \varphi(b)$, Il existe donc $c \in \mathrm{Int}(a,b)$ t.q. $\varphi'(c) = 0$, ce qui donne (comme $b - c \neq 0$)

$$d = f^{(n+1)}(c).$$

On en déduit bien $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$. ■

4.2 Taylor-Young

Notation : Lorque l'on dit qu'une propriété est vraie "au voisinage" de a ou encore "pour x suffisamment proche de a", cela signifie qu'il existe $\gamma > 0$ t.q. pour tout $x \in [a-\gamma, a+\gamma]$ la propriété est vraie.

Théorème 4.2 (Taylor-Young) *Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ et f de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que f de classe C^n. Soit $a \in]\alpha, \beta[$. Alors, on a :*

1. *Pour tout $x \in]\alpha, \beta[$,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n h(x), \quad \textit{avec } \lim_{x \to a} h(x) = 0 \tag{4.2}$$

(et donc h continue en a, si on ajoute $h(a) = 0$). On dit que la fonction $(x-a)^n h(x)$, avec $\lim_{x\to a} h(x) = 0$, est un "petit o" de $(x-a)^n$ et on note $(x-a)^n h(x) = o((x-a)^n)$.

2. *Pour tout $x \in]\alpha, \beta[$,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n H(x),$$

avec H bornée au voisinage de a (c'est-à-dire qu'il existe $\gamma > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ t.q. $|x-a| \leq \gamma \Rightarrow |H(x)| \leq M$). On dit que la fonction $(x-a)^n H(x)$, avec H bornée au voisinage de a, est un "grand O" de $(x-a)^n$ et on note $(x-a)^n H(x) = O((x-a)^n)$.

Démonstration : On va démontrer le premier item du théorème 4.2 en appliquant le théorème 4.1 à l'ordre $n-1$. Soit $x \in]\alpha, \beta[$, $x \neq a$. D'après le théorème 4.1 il existe $c_x \in \mathrm{Int}(a,x)$ t.q.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c_x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n h(x),$$

avec $h(x) = \dfrac{1}{n!} \Big(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a) \Big)$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Comme $f^{(n)}$ est continue en a, il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$|y - a| \leq \alpha \Rightarrow |f^{(n)}(y) - f^{(n)}(a)| \leq \varepsilon.$$

Comme $c_x \in \text{Int}(a, x)$, on a donc aussi

$$|x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)| \leq \varepsilon \Rightarrow |h(x)| \leq \varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $\lim_{x \to a} h(x) = 0$.
Pour montrer le deuxième item, on remarque simplement que pour $x \in]\alpha, \beta[$, $x \neq a$,

$$H(x) = h(x) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

On a donc $\lim_{x \to a} H(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$, on en déduit que H est ue fonction bornée au voisinage de a.

■

Remarque 4.1

1. Avec le thérorème 4.2 pour $n = 1$, on retrouve la définition de la dérivée, c'est-à-dire :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)h(x),$$

   avec $\lim_{x \to a} h(x) = 0$. On remarque alors que l'hypothèse "f de classe C^1" dans le thérorème 4.2 n'est pas nécessaire (il suffit de f dérivable en a, la continuité de f' n'est pas nécessaire). Ceci est général, voir l'item suivant.

2. Le thérorème 4.2 est encore vraie sous l'hypothèse plus faible (au lieu de f de classe C^n) : f de classe C^{n-1} et $f^{(n-1)}$ dérivable en a.

Le théorème 4.2 (Taylor-Young) donne uniquement, pour a fixé, une information locale sur f (c'est-à-dire une information sur le comportement de f au voisinage de a). Le théorème 4.1 (Taylor-Lagrange) donne une information locale plus précise (car il donne une précision sur la fonction $h(x)$ de la formule de Taylor-Young), comme nous allons le voir dans l'exemple suivant. Il donne aussi une information globale sur f, même si a est fixé (voir aussi l'exemple suivant). Une troisième formule de Taylor, la formule de Taylor avec reste intégral, est encore plus précise. Elle nécessite la construction de l'intégrale, nous la verrons donc au chapitre 5.

Exemple 4.1 (Exemples d'application des formules de Taylor) Nous commençons par une application de la formule de Taylor-Young puis de celle de Taylor-Lagrange.

1. (Application de Taylor-Young, $n = 1$) Soit $0 < \alpha < 1$. La formule de Taylor-Young permet de calculer la limite de $f(x) = (x + 3)^\alpha - (x + 1)^\alpha$ quand $x \to \infty$ (en mettant x^α en facteur et en utilisant la formule de Taylor-Young au voisinage de 0). Dans le cas particulier $\alpha = 1/2$, une autre démonstration possible, classique, consiste à utiliser l'astuce de la "quantité conjuguée".

2. (Application de Taylor-Lagrange, $n = 2$) Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$, f une application de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2, et $a \in]\alpha, \beta[$. On cherche un point $a \in]\alpha, \beta[$ t.q. $f(a) = \min_{x \in]a,b[} f(x)$. Le thèorème 4.1 permet de montrer les deux résultats suivants (voir la proposition 4.6) :

   (a) (Condition Nécessaire) $f(a) = \min_{x \in]a,b[} f(x) \Rightarrow (f'(a) = 0 \text{ et } f''(a) \geq 0)$.

(b) (Condition Suffisante) ($f'(a) = 0$ et, pour tout $x \in]\alpha, \beta[$, $f''(x) \geq 0$) $\Rightarrow$ $f(a) = \min_{x \in]a,b[} f(x)$.

Proposition 4.1 (Condition suffisante de dérivabilité en un point) *Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$, f une application de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$, continue, et $a \in]\alpha, \beta[$.*

1. *On suppose que f est dérivable sur $]\alpha, \beta[\setminus\{a\}$ et qu'il existe $a_1 \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{x \to a} f'(x) = a_1$. Alors f est dérivable en a et $f'(a) = a_1$.*
2. *On suppose que f est de classe C^∞ sur $]\alpha, \beta[\setminus\{a\}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ t.q. :*
$$\lim_{x \to a} f^{(n)}(x) = a_n.$$
Alors f est de classe C^∞ sur $]\alpha, \beta[$.

DÉMONSTRATION : Cette proposition est démontrée dans l'exercice (corrigé) 3.12. ■

4.3 Fonctions analytiques (hors programme...)

Remarque 4.2 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞. Soit $a, x \in \mathbb{R}$ (fixés). D'après le théorème 4.1 (Taylor-lagrange), pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in \mathrm{Int}(a, x)$ t.q. :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_n).$$
On suppose (cette hypothèse est forte) qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q.
$$n \in \mathbb{N},\ y \in \mathrm{Int}(a, x) \Rightarrow |f^{(n)}(y)| \leq M. \tag{4.3}$$
On rappelle que a et x sont fixés. Sous l'hypothèse (4.3), on a alors
$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a). \tag{4.4}$$
Pour démontrer (4.4) (avec l'hypothèse (4.3)), il suffit de remarquer que, grâce à (4.1), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leq M \frac{\gamma^{n+1}}{(n+1)!} \text{ avec } \gamma = |x-a|,$$
et d'utiliser le petit lemme 4.1 donné ci-après.

Lemme 4.1 *Soit $\gamma > 0$. Alors, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\gamma^n}{n!} = 0$.*

DÉMONSTRATION : . Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{\gamma^n}{n!}$. On remarque que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\gamma}{n+1}$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.
$$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n.$$
Par récurrence sur n (à partir de n_0), on a donc
$$n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}.$$
Ce qui prouve que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$. ■

Exemple 4.2 Voici quelques exemples de fonctions f (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) satisfaisant l'hypothèse (4.3) pour tout $a, x \in \mathbb{R}$ (le nombre M peut alors dépendre de a et x).

1. f est polynôme. Dans ce cas, il existe bien M (dépendant de a et x) vérifiant (4.3). Mais, pour montrer (4.4), il est plus facile de remarquer que $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k > m$, où m est le degré du polynôme f. La formule (4.4) découle alors directement de la formule (4.1) en prenant $n = m + 1$.
2. $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ (prendre $M = 1$),
3. $f(x) = e^x$ (prendre $M = \max(e^a, e^x)$, dans cet exemple M dépend donc de a et x).

La question suivante est alors naturelle :
Question : Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞. A t-on :
pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $R > 0$ t.q. $|x - a| < R \Rightarrow f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$?
Réponse : En général, la réponse est "non". Ave la remarque 4.2, on montre que la réponse est "oui" si on a, pour tout $a, x \in \mathbb{R}$, l'hypothèse (4.3) (c'est-à-dire que pour tout $a, x \in \mathbb{R}$ il existe M vérifiant (4.3)).

Définition 4.1 *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que f est analytique si :*

1. *f est de classe C^∞,*
2. *pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $R > 0$ t.q. $|x - a| < R$ implique $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.*

L'hypothèse (4.3) donnée dans la remarque 4.2 donne une condition suffisante pour que f soit analytique.

Exemple 4.3 On donne ici un exemple de fonction C^∞ non analytique.

$$f(x) = 0, \ \textbf{si } x \le 0,$$
$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}, \ \textbf{si } x > 0.$$

Pour cette fonction, on peut montrer les deux assertions suivantes:

1. f est de classe C^∞,
2. f n'est pas analytique. Cet exemple est détaillé dans l'exercice 4.1. Le fait que f soit non analytique est aussi une conséquence de l'exercice 4.25.

Remarque 4.3 (Analytique = développable en série entière) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est développable en série entière si pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels et il existe $R > 0$ t.q.

$$|x - a| < R \Rightarrow f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k. \tag{4.5}$$

On peut montrer qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est analytique si et seulement si elle est développable en série entière. En effet, si f est analytique, la définition 4.1 montre immédiatement que f est développable en série entière (on prend $a_k = f^{(k)}(a)/k!$ pour tout k dans (4.5)). La réciproque est plus difficile. On suppose que f est développable en série entière. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $R > 0$ vérifiant (4.5). On remarque tout d'abord que $a_0 = f(a)$. Puis on montre (mais ce n'est pas détaillé ici) que f est dérivable au point x pour tout x t.q. $|x-a| < R$ et que

$$|x-a| < R \Rightarrow f'(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k a_k (x-a)^{k-1}.$$

Ceci donne en particulier que $f'(a) = a_1$. Il suffit alors de faire une récurence sur n pour montrer que f est de classe C^∞ sur la boule de centre a et rayon R et que $k!\, a_k = f^{(k)}(a)$. Finalement, on obtient le deuxième item de la définition 4.1 et, comme a est arbitraire, on conclut bien que f est analytique.

Remarque 4.4 (analyse réelle versus analyse complexe)
voici une différence importante entre analyse réelle et complexe.

1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a alors :

$$f \text{ dérivable partout } \not\Rightarrow f \text{ de classe } C^\infty \not\Rightarrow f \text{ analytique.}$$

2. Soit f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. La définition 3.1 donne une notion naturelle de dérivabilité de f. On dit que f est dérivable au point $x \in \mathbb{C}$ si φ a une limite (dans $\mathbb{C}$) en 0, avec $\varphi(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ pour $h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0$. Noter aussi que, dans $\mathbb{C}$, $|z|$ est le module de z et joue le rôle de la valeur absolue dans les définitions de limites. On peut alors définir aussi, comme dans le cas de $\mathbb{R}$, les fonctions de classe C^∞ et les fonctions analytiques. On a alors :

$$f \text{ dérivable partout } \Rightarrow f \text{ de classe } C^\infty \Rightarrow f \text{ analytique.}$$

Une application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ dérivable partout, s'appelle "fonction holomorphe". Comme pour le cas des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si elle est développable en série entière (voir la remarque 4.3 et remplaçer $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$.)

4.4 Développements limités

Définition 4.2 (*DLn*) *Soit $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$ et f une application de $]\alpha,\beta[$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in]\alpha,\beta[$, on suppose que f est continue en a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, f admet un "DLn" (pour "Développement Limité d'ordre n) en a si il existe $a_0,\dots a_n \in \mathbb{R}$ t.q. (pour $x \in]\alpha,\beta[$) :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0. \tag{4.6}$$

Autrement dit, il existe un polynôme de degré au plus n, noté P, t.q. $f(x) = P(x) + (x-a)^n\varepsilon(x)$ (avec $\lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$). Comme cette formule n'est intéressante que au voisinage de a, on écrit ce polynôme sous la forme donnée en (4.6), c'est-à-dire avec des puissances de plus en plus grandes de $(x-a)$ (car, pour $k \in \mathbb{N}$ et pour $|x-a|$ petit par rapport à 1, $|x-a|^{k+1}$ est petit par rapport à $|x-a|^k$).

Remarque 4.5 Quelques remarques élémentaires sur les Développement Limités. On se place dans les hypothèses de la définition 4.2.

1. Si f admet un DLn, les a_k (de la formule (4.6)), $k = 0,\dots,n$, sont uniques.

2. Si f est de classe C^n, f admet un DLn en a et la formule (4.6) est vraie avec $a^k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ pour $k = 0, \ldots, n$.

3. On suppose ici que $n \geq 1$. Alors :

$$f \text{ admet un } DLn \text{ en } a \Rightarrow f \text{ dérivable en } a \text{ et } f'(a) = a_1 \text{ (dans la formule (4.6))}.$$

4. On suppose ici que $n \geq 2$. Alors :

$$f \text{ admet un } DLn \text{ en } a \not\Rightarrow f' \text{ définie dans un voisinage de } a,$$

et on ne peut donc pas dériver f' en a. On a bien $f'(a) = a_1$, mais on ne peut pas dire que $f''(a) = 2a_2$ (dans la formule (4.6)). Un exemple est donné dans l'exemple 4.4.

5. On définit g (de $]\alpha - a, \beta - a[$ dans $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x + a)$. Alors, f admet un DLn en a si et seulement si g admet un DLn en 0 (et les coefficients du développement limité sont les mêmes).

Exemple 4.4 On donne ici un exemple pour le quatrième item de la remarque 4.5. Soit $n \geq 2$. On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{l} f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0, \\ f(x) = x^{n+1} \text{ si } x \in]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}] \text{ avec } p \in \mathbb{N}^\star \text{ pair}, \\ f(x) = -x^{n+1} \text{ si } x \in]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}] \text{ avec } p \in \mathbb{N}^\star \text{ impair}, \\ f(x) = -1 \text{ si } x > 1. \end{array}$$

Pour cette application, f' n'est pas définie en $\frac{1}{p}$ pour tout $p > 1$ (car f non continue en ce point) et f admet un DLn en 0.

On peut souvent calculer un développement limité en utilisant la formule de Taylor-Young (formule (4.2)), c'est ce qui est suggéré par le deuxième item de la remarque 4.5. On donne un exemple ci après (exemple 4.5).

Exemple 4.5 Pour $x < 1$, on pose $f(x) = \frac{1}{1-x}$. La fonction f est de classe C^∞ sur $] - \infty, 1[$. On peut démontrer, par récurrence sur n que $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $x < 1$. On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, le DLn en 0 de f :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{n} x^i + \varepsilon(x)x^n, \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Proposition 4.2 (Opérations sur DL) *Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ et f, g deux applications de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in]\alpha, \beta[$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que f, g admettent des DLn en a. Alors :*

1. *$f + g$ admet un DLn en a,*

2. *fg admet un DLn en a,*

3. *Si $g(a) \neq 0$, f/g (bien définie au voisinage de a) admet un DLn en a.*

Les DLn de $f + g$, fg et f/g (si $g(a) \neq 0$) se calculent à partir des DLn de f et g.

Démonstration : Compte tenu du cinquième item de la remarque 4.5, on peut supposer $a = 0$ (ce qui simplifie les formules).

Comme f, g admettent des DLn en 0, il existent des polynômes P et Q, de degré au plus n, t.q., pour tout $x \in]\alpha, \beta[$,

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x),$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

Le premier item de la proposition est facile, il suffit de remarquer que (pour tout $x \in]\alpha, \beta[$)

$$f(x) + g(x) = (P + Q)(x) + x^n \varepsilon_3(x),$$

avec $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Le polynôme $P + Q$ est de degré au plus n et $\lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$. On a bien montré que la fonction $f + g$ admet un DLn en 0 et on trouvé ce DLn.

Le deuxième item est à peine plus difficile. On remarque que (pour tout $x \in]\alpha, \beta[$)

$$f(x)g(x) = P(x)Q(x) + x^n (P(x)\varepsilon_2(x) + Q(x)\varepsilon_1(x) + x^n \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)).$$

Le polynôme PQ est de degré au plus $2n$, on peut donc l'écrire $PQ(x) = R(x) + x^{n+1}S(x)$, où R est un polynôme de degré au plus n et S est un polynôme (de degré au plus $n - 1$). On obtient alors

$$fg(x) = R(x) + x^n \varepsilon_4(x),$$

avec $\varepsilon_4(x) = xS(x) + P(x)\varepsilon_2(x) + Q(x)\varepsilon_1(x) + x^n \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$. On a bien $\lim_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0$. Ce qui prouve que fg admet un DLn en 0 et on aussi trouvé ce DLn (c'est-à-dire le polynôme R).

Le troisième item est plus difficile. On pose $b = g(0)$. Comme $b \neq 0$ et que g est continue en 0, il existe $\gamma > 0$ t.q. $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in] - \gamma, \gamma[$. On se limite donc maintenant à $x \in] - g, \gamma[$ et $\frac{f}{g}(x)$ est bien définie.

Pour $x \in] - \gamma, \gamma[$, on pose $h(x) = 1 - \frac{g(x)}{b}$ de sorte que $g(x) = b(1 - h(x))$ et

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{b} \frac{1}{1 - h(x)}.$$

Noter que $h(x) \neq 1$ car $g(x) \neq 0$ (puisque $x \in] - \gamma, \gamma[$). Comme $h(0) = 0$ (et que h est continue), le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 2.2) donne même que $h(x) < 1$ pour tout $x \in] - \gamma, \gamma[$.

La fonction h admet un Dln en 0. Plus précisément, en posant $T(x) = 1 - \frac{Q(x)}{b}$, la fonction T est un polynôme de degré au plus n et on a

$$h(x) = T(x) + x^n \varepsilon_5(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_5(x) = 0. \tag{4.7}$$

Comme $h(0) = 0$, on a nécessairement (grâce à la continuité de T et h en 0) $T(0) = 0$ et donc $T(x) = xS(x)$, où S est un polynôme (de degré au plus $n - 1$).

On pose maintenant $\varphi(x) = \frac{1}{1-h(x)}$ (de sorte que $\frac{f}{g} = \frac{f}{b}\varphi$). Pour montrer que $\frac{f}{g}$ admet un DLn en 0 (et trouver ce DLn), il suffit donc, compte tenu du deuxième item de cette proposition, de montrer que φ admet un DLn en 0 (et de trouver ce DLn). Pour obtenir le DLn de φ en 0, on utilise l'exemple 4.5 qui donne, pour tout $y < 1$,

$$\frac{1}{1 - y} = 1 + \sum_{k=1}^{n} y^k + y^n \varepsilon(y), \quad \text{avec } \lim_{y\to 0} \varepsilon(y) = 0.$$

(On rappelle qu'en posant $\varepsilon(0) = 0$ on a ε continue en 0.) On a donc (pour tout $x \in]-\gamma, \gamma[$)

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-h(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (h(x))^k + (h(x))^n \varepsilon(h(x)).$$

En utilisant (4.7) et $T(x) = xS(x)$, on obtient $(h(x))^n \varepsilon(h(x)) = x^n (S(x)+x^{n-1}\varepsilon_5(x))^n \varepsilon(h(x)) = x^n \varepsilon_6(x)$, avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_6(x) = 0$ (car $h(0) = \varepsilon(0) = 0$ et h et ε sont continues en 0). Ce qui donne

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-h(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (T(x) + x^n \varepsilon_5(x))^k + x^n \varepsilon_6(x). \tag{4.8}$$

On remarque maintenant que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ il existe un polynôme T_k de degré au plus n t.q. $(T(x) + x^n \varepsilon_5(x))^k = T_k(x) + x^n \eta_k(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \eta_k(x) = 0$. Ceci peut se démontrer en développant la formule $(T(x) + x^n \varepsilon_5(x))^k$. On peut aussi montrer ce résultat par récurrence (finie) sur k (et on obtient aussi ainsi les polynômes T_k). C'est cette seconde méthode que nous utilisons ici.

Initialisation : Pour $k = 1$, on a $T_1 = T$ (et $\eta_1 = \varepsilon_5$).

Calcul de T_{k+1} connaissant T_k ($k \in \{1, \ldots, n-1\}$) : Comme $(T(x) + x^n \varepsilon_5(x))^k = T_k(x) + x^n \eta_k(x)$, on a

$$\begin{aligned}(T(x) + x^n \varepsilon_5(x))^{k+1} &= (T_k(x) + x^n \eta_k(x))(T(x) + x^n \varepsilon_5(x)) \\ &= T_k(x)T(x) + x^n \left(T(x)\eta_k(x) + T_k(x)\varepsilon_5(x) + x^n \eta_k(x)\varepsilon_5(x)\right).\end{aligned}$$

Le polynôme $T_k T$ peut s'écrire $T_k(x)T(x) = T_{k+1}(x) + x^{n+1} S_k(x)$, où T_{k+1} est un polynôme de degré au plus n et S_k est un polynôme (de degré au plus $n-1$). On obtient ainsi

$$(T(x) + x^n \varepsilon_5(x))^{k+1} = T_{k+1}(x) + x^n \eta_{k+1}(x), \tag{4.9}$$

avec $\eta_{k+1}(x) = xS_k(x) + T(x)\eta_k(x) + T_k(x)\varepsilon_5(x) + x^n \eta_k(x)\varepsilon_5(x)$, et donc $\lim_{x\to 0} \eta_{k+1}(x) = 0$. Ce qui termine la récurrence.

On utilise maintenant la formule (4.9) dans (4.8) pour obtenir

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-h(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{n} T_k(x) + x^n \varepsilon_7(x),$$

avec $\varepsilon_7 = \varepsilon_6 + \sum_{k=1}^{n} \eta_k$, et donc $\lim_{x\to 0} \varepsilon_7(x) = 0$. Ce qui donne le DLn en 0 de φ. On en déduit ensuite (par le deuxième item de cette proposition) le DLn de $\frac{f}{g}$ en 0. ■

Proposition 4.3 (Composition de DL) *Soit f une application de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in]\alpha, \beta[$. Soit g une application de $]\gamma, \delta[$ dans $\mathbb{R}$ et $b \in]\gamma, \delta[$. On suppose que $g(b) = a$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que f et g admettent des DLn, en a pour f et en b pour g. Alors $f \circ g$ admet un DLn en b et ce DLn se calcule à partir des DLn de f et g.*

Démonstration : Dans la proposition 4.2, nous avons en fait démontré cette proposition dans un cas particulier (correspondant ici à prendre $a = b = 0$ et pour f l'application $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, définie sur $]-\infty, 1[$). Pour la démontrer dans le cas général demandée ici, on reprend essentiellement la même méthode que dans la proposition 4.2.

On commence par remarquer qu'on peut toujours se ramener au cas $a = b = 0$. En effet, Il suffit de poser $F(x) = f(x+a)$ et $G(x) = g(x+b) - g(b)$. Les DLn de f et g en a et b donnent les DLn de F et G en 0. Puis, comme $f(g(x+b)) = F(G(x))$, le DLn de $F \circ G$ en 0 donne le DLn de $f \circ g$ en b.

On suppose donc maintenant que $a = b = 0$.

Comme g est continue en 0 et $g(0) = 0 \in]\alpha, \beta[$, il existe $\omega > 0$ t.q.

$$x \in]-\omega, +\omega[\Rightarrow g(x) \in]\alpha, \beta[.$$

La fonction $f \circ g$ est donc bien définie sur l'interavelle $]-\omega, +\omega[$. On se limite dans la suite à $x \in]-\omega, +\omega[$. Comme g admet un DLn en 0, il existe un polynôme Q de degré au plus n t.q. $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_1(x)$ (pour tout $x \in]-\omega, +\omega[$) et $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$, c'est-à-dire ε_1 continue en 0, en posant $\varepsilon_1(0) = 0$.

Comme f admet un DLn en 0, il existe un polynôme P de degré au plus n t.q. $f(y) = P(y) + y^n\varepsilon_2(y)$ (pour tout $y \in]\alpha, \beta[$) et $\lim_{y\to 0}\varepsilon_2(y) = 0$, , c'est-à-dire ε_2 continue en 0, en posant $\varepsilon_2(0) = 0$.

On en déduit, pour tout $x \in]-\omega, +\omega[$, en prenant $y = g(x)$

$$f(g(x)) = P(g(x)) + g(x)^n\varepsilon_2(g(x)) = P(g(x)) + g(x)^n\varepsilon_3(x), \tag{4.10}$$

avec $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 \circ g$ et donc $\varepsilon_3(0) = 0$ et ε_3 continue en 0. On rappelle aussi que

$$g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_1(x).$$

Or $Q(0) = g(0) = 0$ (car Q et g sont continues en 0). Ceci montre que Q est un polynôme qui s'annule en 0. Il existe donc un polynôme R (de degré au plus $n-1$) t.q. $Q(x) = xR(x)$. Ceci montre que

$$g(x) = x(R(x) + x^{n-1}\varepsilon_1(x)).$$

En reportant cette égalité dans (4.10) on obtient

$$f(g(x)) = P(g(x)) + x^n\varepsilon_4(x), \tag{4.11}$$

avec $\varepsilon_4(x) = (R(x) + x^{n-1}\varepsilon_1(x))^n\varepsilon_3(x)$. On a donc aussi ε_4 continue en 0 et $\varepsilon_4(0) = 0$. Enfin, comme P est un polynôme de degré au plus n, il existe $a_0, \ldots, a_n$ t.q.

$$P(y) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k y^k.$$

Comme $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_1(x)$, on a donc

$$P(g(x)) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k(Q(x) + x^n\varepsilon_1(x))^k.$$

On reprend maintenant une partie de la démonstration de la proposition 4.2. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ il existe un polynôme Q_k de degré au plus n t.q. $(Q(x)+x^n\varepsilon_1(x))^k = Q_k(x)+x^n\eta_k(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\eta_k(x) = 0$. On obtient alors, avec (4.11),

$$f(g(x)) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k Q_k(x) + x^n\varepsilon_5(x),$$

$\varepsilon_5 = \varepsilon_4 + \sum_{k=1}^{n} a_k\eta_k$, et donc $\lim_{x\to 0}\varepsilon_5(x) = 0$. Ce qui donne le DLn en 0 de $f \circ g$. ∎

Proposition 4.4 (DL de f à partir du DL de f') *Soit f une application de $]\alpha,\beta[$ dans $\mathbb{R}$, dérivable. Soit $a \in]\alpha,\beta[$. On suppose que f' admet un DLn en a. Alors f admet un $DL(n+1)$ en a et le $DL(n+1)$ de f se calcule à partir du DLn de f'.*

Démonstration : Ici encore, on peut se limiter à considérer le cas $a = 0$. Comme f' admet un DLn en 0, il existe $a_0, \ldots, a_n$ t.q. (pour tout $x \in]\alpha,\beta[$)

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

On “devine” alors ce que doit être le $DL(n+1)$ de f en 0. Pour le montrer, on définit la fonction φ de $]\alpha,\beta[$ par

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

la fonction φ est dérivable sur $]\alpha,\beta[$, et $\varphi'(x) = x^n\varepsilon(x)$, pour tout $x \in]\alpha,\beta[$.

Pour $x \in]\alpha,\beta[$, on utilise le théorème des accroissements finis (théorème 3.2) sur l'intervalle dont les bornes sont 0 et x. Il donne l'existence de $c_x \in \mathrm{Int}(0,x)$ t.q. $\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(x) = xc_x^n\varepsilon(c_x)$. Comme $|c_x| \le |x|$, on en déduit

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| = |f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} - f(0)| \le |x|^{n+1}\varepsilon_1(x); \tag{4.12}$$

avec $\varepsilon_1(x) = \max\{|\varepsilon(y)|,\ y \in \mathrm{Int}(0,x)\}$. Comme $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ on a aussi $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$. De (4.12) on déduit alors

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + x^{n+1}\varepsilon_2(x),$$

avec $|\varepsilon_2(x)| \le \varepsilon_1(x)$ et donc $\lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$. Ce qui donne le $DL(n+1)$ de f. ■

4.5 Exemples (formules de taylor, DL)

En pratique, pour trouver un développement limité on utilise souvent la formule de Taylor Young si la fonction est “simple” (et régulière) ou l'une des propositions du paragraphe 4.4 si la fonction est “compliquée”. On donne maintenant quelques exemples.

Exemple 4.6 Soit P un polynôme (non nul) de degré d. Alors P est de classe C^∞ (sur $\mathbb{R}$) et le reste du DLn (c'est-à-dire le terme $(x-a)^n h(x)$ dans la formule (4.2) ou le terme $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ dans la formule (4.1)) est nul pour $n \ge d$. (Donc, P est analytique.)

Exemple 4.7 On prend ici $f(x) = \ln(1+x)$, pour $x > -1$ (la fonction f est analytique sur $]-1,+\infty[$). On peut calculer, par exemple, son $DL2$ en 0. Comme $f'(0) = 1$ et $f''(0) = -1$, on trouve $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Exemple 4.8 On prend ici $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ (la fonction f est analytique sur $\mathbb{R}$). On remarque que $f^{(2p)}(x) = (-1)^p \sin(x)$ et $f^{(2p+1)}(x) = (-1)^p \cos(x)$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On en déduit, par exemple, avec la formule (4.2), le $DL4$, de f en 0 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Exemple 4.9 On prend ici $g(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ (la fonction g est analytique sur $\mathbb{R}$). On remarque que $g^{(2p)}(x) = (-1)^p \cos(x)$ et $g^{(2p+1)}(x) = (-1)^{p+1} \sin(x)$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On en déduit, par exemple, avec la formule (4.2), le $DL3$, de g en 0 :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Exemple 4.10 On prend ici $h(x) = \tan x$, $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ (la fonction h est analytique sur $]-\pi/2, \pi/2[$). Pour trouver, par exemple, le $DL3$ en 0, on peut utiliser deux méthodes :

1. (Première méthode) Calculer $h(0)$, $h'(0)$, $h''(0)$, $h'''(0)$ et utiliser la formule (4.2),
2. (Deuxième méthode) Faire le quotient des DL de f et g.

On trouve (dans les deux cas !)

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Exemple 4.11 On prend ici $\psi(x) = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$. La fonction ψ est donc la fonction réciproque de la fonction tan, notée h dans l'exemple 4.10, on garde ici cette notation. La fonction ψ est définie sur $\mathbb{R}$ (et elle est analytique). Pour calculer, par exemple, son $DL3$ en 0, on peut commencer par utiliser la proposition 3.4 sur les fonctions réciproques, elle donne que $\psi'(h(x))h'(x) = 1$ pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. Comme $h'(x) = 1 + \tan^2(x) = 1 + (h(x))^2$, on obtient

$$\psi'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{4.13}$$

On obtient alors le $DL3$ de ψ en 0 en calculant les valeurs en 0 de ψ et ses trois premières dérivées (avec la formule (4.13) ou avec la proposition 4.5) :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Proposition 4.5 *Soit $-\infty \le a < b \le +\infty$, $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$ et f une application de $]a, b[$ dans $]\alpha, \beta[$, strictement croissante, continue, bijective. On note g la fonction réciproque de f. On suppose que f est dérivable et $f'(x) \ne 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Alors :*

1. *g dérivable de $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ pour tout $x \in]\alpha, \beta[$.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*
$$f \text{ de classe } C^n \Rightarrow g \text{ de classe } C^n.$$
Donc, si f de classe C^n, g admet un DLn en tout point de $]\alpha, \beta[$. (Pour calculer le DLn de g, si on connait les dérivées de f, on trouve celles de g en dérivant la formule $g'(x)f'(g(x)) = 1$.)

Démonstration : Le premier item a été démontré dans la proposition 3.4.
On montre le deuxième item par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ a déjà été vu (théorème 2.5). On commence la récurrence à $n = 1$.

Initialisation : $n = 1$. On suppose que f est de classe C^1. On a alors g continue (théorème 2.5) et f' continue (par hypothèse). On a donc $f' \circ g$ continue et, comme $f' \circ g$ ne s'annule pas, on a aussi $1/(f' \circ g)$ continue, c'est-à-dire g' continue. La fonction g est donc de classe C^1.

Passage de n à $n+1$: Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.On suppose que

$$f \text{ de classe } C^n \Rightarrow g \text{ de classe } C^n.$$

et on veut montrer que

$$f \text{ de classe } C^{n+1} \Rightarrow g \text{ de classe } C^{n+1}.$$

On suppose donc que f est de classe C^{n+1}. On a donc f' de classe C^n. De plus, comme f est de classe C^n, l'hypothèse de récurrence donne que g est de classe C^n. Par composition, on en déduit que $f' \circ g$ est de classe C^n et donc, comme $f' \circ g$ ne s'annule pas, que $1/(f' \circ g)$ est de classe C^n. Ceci donne donc que g' est de classe C^n et donc que g est de classe C^{n+1}. Ce qui termine la récurrence. ■

On revient sur le deuxième item de l'exemple 4.1 sur la recherche des extrémas d'une fonction.

Définition 4.3 *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que f admet un minimum local en a si il existe $\gamma > 0$ t.q. :*

$$x \in \mathbb{R},\ |x-a| \le \gamma \Rightarrow f(a) \le f(x).$$

La proposition suivante donne des conditions nécessaires et une condition suffisante pour que f admette un minimum local en a (grâce à la formule (4.1), formule de Taylor-Lagrange).

Proposition 4.6 *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose f dérivable en a. Alors, si f admet un minimum local en a on a nécessairement $f'(a) = 0$. Plus précisément, si f est de classe C^2, on a :*

1. *(Condition Nécessaire) f admet un minimum local en a $\Rightarrow$ $f'(a) = 0$ et $f''(a) \ge 0$.*
2. *(Condition Suffisante) $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ $\Rightarrow$ f admet un minimum local en a.*

Démonstration :
Condition Nécessaire. On suppose que f est dérivable en a et que f admet un minimum local en a. Il existe donc $\alpha > 0$ t.q. $f(a) \le f(x)$ pour tout $x \in]a-\alpha, a+\alpha[$. Pour $0 < h < \alpha$ on a donc

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \ge 0.$$

On en déduit que $f'(a) = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \ge 0$.
On remarque maintenant que pour $-\alpha < h < 0$ on a

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \le 0.$$

On en déduit que $f'(a) = \lim_{h\to 0, h<0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \le 0$. Finalement, on a bien montré que $f'(a) = 0$.
On suppose maintenant de plus que f est de classe C^2. Pour montrer que $f''(a) \ge 0$, on peut utiliser les formules de Taylor-Lagrange ou de Taylor-Young. On le fait ici avec la formule de Taylor-Young. La formule (4.2) donne, pour tout $x \in]a-\alpha, a+\alpha[$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + (x-a)^2 h(x), \quad \text{avec} \lim_{x\to a} h(x) = 0.$$

Comme $f'(a) = 0$ et $f(x) \ge f(a)$, on a donc, pour tout $x \in]a-\alpha, a+\alpha[$,

$$f''(a) \ge 2h(x).$$

Quand $x \to a$, on en déduit $f''(a) \geq 0$.

Condition Suffisante. Comme $f''(a) > 0$ et f'' continue en a, il existe $\alpha > 0$ t.q. $f''(y) > 0$ pour tout $y \in]a-\alpha, a+\alpha[$. On va montrer que $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in]a-\alpha, a+\alpha[$ en utilisant la formule de Taylor-Lagrange (on ne peut pas conclure ici avec la formule de Taylor-Young). Soit $x \in]a-\alpha, a+\alpha[$, $x \neq a$. D'après la formule (4.1), il existe $c_x \in \mathrm{Int}(a,x)$ t.q.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(c_x).$$

Comme $f'(a) = 0$ et $f''(c_x) > 0$ (car $c_x \in]a-\alpha, a+\alpha[$), on a donc $f(x) > f(a)$. On a bien montré que f admet un minimum local en a. ∎

Les notions que nous venons d'introduire (limite, continuité, dérivée, développements limités) permettent détudier des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Plusieurs exercices sont consacrés à cette question. On rappelle maintenant la notion d'asymptote, utilisée dans plusieurs exercices. Par exemple, si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $x \mapsto ax+b$ est l'asymptote de f en $+\infty$ si $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax - b) = 0$.

4.6 Equivalents

Définition 4.4 *Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$, $\alpha \leq a \leq \beta$ et $D \supset]\alpha, \beta[\setminus \{a\}$. Soit f, g deux applications de D dans $\mathbb{R}$. On dit que $f \sim g$ en a (ou que $f(x) \sim g(x)$ en a) si $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$ au voisinage de a, avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.*

Sous les hypothèses de la définition 4.4, si $a \in \mathbb{R}$, la phrase "$f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x))$ au voisinage de a" signifie qu'il existe $\gamma > 0$ t.q. $f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x))$ pour tout $x \in [a-\gamma, a+\gamma] \cap D$. Si $a = +\infty$, elle signifie qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x))$ pour tout $x \in [M, +\infty[$. Si $a = -\infty$, elle signifie qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x))$ pour tout $x \in]-\infty, M]$.

Remarque 4.6 Deux propriétés simples, sous les hypothèses de la définition 4.4.

1. $f \sim g$ en $a \Leftrightarrow g \sim f$ en a.
2. Si f (ou g) est non nulle au voisinage de a (sauf éventuellement en a), on a alors :
   $f \sim g$ en $a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 1$.

Exemple 4.12 Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une application définie au voisinage de a, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors :

1. Si f dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, on a alors $f(x) - f(a) \sim (x-a)f'(a)$ en a.
2. Si f de classe C^2, $f'(a) = 0$ et $f''(a) \neq 0$, on a alors $f(x) - f(a) \sim \frac{(x-a)^2}{2} f''(a)$ en a.

Voici des applications immédiates de l'exemple 4.12 :
$\sin x \sim x$ en 0, $\cos x - 1 \sim -x^2/2$ en 0.

Proposition 4.7 (Produit d'équivalents) *Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et f, g, φ, ψ quatres applications définies au voisinage de a, à valeurs dans $\mathbb{R}$, t.q. $f \sim g$, $\varphi \sim \psi$ en a. Alors, $f\varphi \sim g\psi$ en a.*

Démonstration : On suppose $a \in \mathbb{R}$ (les cas $a = \pm\infty$ sont laissés en exercice). Il existe $\gamma > 0$ t.q., pour tout $x \in [a-\gamma, a+\gamma]$,

$$f(x) = g(x)(1+\varepsilon_1(x)), \text{ avec } \lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0,$$

$$\varphi(x) = \psi(x)(1+\varepsilon_2(x)), \text{ avec } \lim_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0.$$

On a alors

$$f(x)\varphi(x) = g(x)\psi(x)(1+\varepsilon_3(x)),$$

avec $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$. On a donc $\lim_{x\to a} \varepsilon_3(x) = 0$, ce qui prouve que $f\varphi \sim g\psi$ en a. ■

Il y a un piège avec les équivalents. Sous les hypothèses de la proposition 4.7 (on a donc $f \sim g$ et $\varphi \sim \psi$ en a) on n'a pas toujours $f + \varphi \sim g + \psi$ en a. Voici un exemple simple. On prend $a = 0$ et, pour tout $x > -1$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$, $\varphi(x) = -\ln(1+x)$, $\psi(x) = -x$. On a bien $f \sim g$ et $\varphi \sim \psi$ en 0. Pourtant, $(f+\varphi) \not\sim (g+\psi)$ en 0. En fait, pour comprendre cette difficulté, il suffit de remaquer que $f \sim 0$ en a implique $f = 0$ au voisinage de a. L'exercice 4.9 donne toutefois un cas particulier pour lequel $f \sim g$ et $\varphi \sim \psi$ en a implique $f + \varphi \sim g + \psi$ en a. Il s'agit du cas où $g = \lambda h$, $\psi = \mu h$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\lambda + \mu \neq 0$.

Définition 4.5 ("petit o" et "grand O") *Soit $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$, $\alpha \le a \le \beta$ et $D \supset]\alpha, \beta[\setminus \{a\}$. Soit f, g deux applications de D dans $\mathbb{R}$*

1. *On dit que $f = o(g)$ en a si $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ au voisinage de a, avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.*
2. *On dit que $f = 0(g)$ en a si il existe $C > 0$ t.q. $|f(x)| \le C|g(x)|$ au voisinage de a.*

4.7 Exercices

Exercice 4.1 (Fonction C^∞ non analytique)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}, \text{ si } x > 0,$$
$$f(x) = 0, \text{ si } x \le 0.$$

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme p_n t.q.

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}, \text{ si } x > 0.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Soit $p \in \mathbb{Z}$, Montrer que :

$$\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p} = 0.$$

   [On rappelle que $e^u \ge \frac{u^q}{q!}$ pour tout $u > 0$ et tout $q \in \mathbb{N}$.]

   (b) Montrer que $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$.
4. Montrer que f est de classe C^∞ (sur $\mathbb{R}$).

5. Montrer que f n'est pas analytique.

Exercice 4.2 (DL, exemple 1)

On définit f sur $]-\infty, 1[$ par :

$$f(x) = \arctan \frac{1}{1-x}.$$

Donner le développement limité à l'ordre 3 de f en 0.

Exercice 4.3 (DL d'un polynôme...)

Donner le développement limité à l'ordre 7 en -1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 1$.

Exercice 4.4 (Utilisation des DL)

Donner la limite en 0 de f définie sur $]0, \infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

Exercice 4.5 (DL, exemple 2)

On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est de classe C^∞. [Reprendre un exercice précédent....]
2. Calculer f' et f".
3. Montrer que f est paire, donner son tableau de variation et sa limite en $+\infty$.
4. Donner le développement limité de f en 0.

Exercice 4.6 (DL, exemple 3, fastidieux...)

On définit f sur $]0, \infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}}$.

1. Montrer que f admet une limite (finie) en 0, notée l. On pose dans la suite $f(0) = l$.
2. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.

Exercice 4.7 (DL d'une fonction réciproque)

On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + \sin x$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement croissante. On note, dans la suite, g sa fonction réciproque.
2. Montrer que f et g sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de g.

Exercice 4.8 (Condition nécessaire et condition suffisante de minimalité)

Soit f une application $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est de classe C^1 et que f admet un minimum local en a. Montrer que $f'(a) = 0$.

2. On suppose que f est de classe C^2, $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$. Montrer que f admet un minimum local en a.

3. Donner un exemple pour lequel f est de classe C^2, $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ et f n'admet pas un minimum local en a.

Exercice 4.9 (Equivalents)

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer que $((1+x)^\alpha - 1) \sim \alpha x$ en 0.

2. Montrer que $(1 + x + x^2) \sim x^2$ en $+\infty$.

3. Soit f, g, h des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On suppose que $f \sim \lambda h$ et $g \sim \mu h$ en 0 et que $\lambda + \mu \neq 0$. Montrer que $(f + g) \sim (\lambda + \mu)h$ en 0. Donner un exemple où ce résultat est faux si $\lambda + \mu = 0$.

4. Soit f et g des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \sim g$ en 0 et $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$. On pose $h(x) = \ln(x)$ pour $x > 0$. Montrer que $h \circ f \sim h \circ g$ en 0.

5. Soit f, g, h des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \sim h$ en 0 et que $g = o(h)$ au voisinage de 0. Montrer que $(f + g) \sim h$ en 0.

Exercice 4.10 (Limite en 0**)**

Trouver les limites en 0 des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^\star$:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}(\frac{1}{1+x^2} - \cos(x)),\ g(x) = \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x},\ h(x) = \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

Exercice 4.11 ($DL3$**)**

Calculer le $DL3$ en 0 de f définie pour $x \in]-1, 1[$ par $f(x) = \sin(x) - \cos(x) + \tan(x) + \frac{1}{1-x}$.
Calculer le $DL3$ en $\frac{\pi}{2}$ de f définie pour $x \in]0, \pi[$ par $f(x) = \ln(\sin(x))$.

Exercice 4.12 ($DL4$**)**

Donner le $DL4$ en 0 des fonctions suivantes (définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :

$$f(x) = (1 + \sqrt{1 + x^2})^{\frac{1}{2}},\ g(x) = e^{\cos(x)}.$$

Exercice 4.13 (DLn**)**

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} &f(x) = \tfrac{x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0, \\ &f(0) = 1 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Montrer que f est continue en 0 et admet un DLn en 0, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 4.14 (Equivalents)

Soit f, g, φ, ψ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x^4 + 1$, $\varphi(x) = x^3 - 3x$, $\psi(x) = x^3$.

1. Montrer que $f \sim g$ en 0.

2. Montrer que $\ln(f)$ et $\ln(g)$ sont définies sur $]-1, \infty[$ et que $\ln(f) \not\sim \ln(g)$ en 0.

3. Montrer que $\varphi \sim \psi$ en $+\infty$.

4. Montrer que $e^{\varphi} \not\sim e^{\psi}$ en $+\infty$.

Exercice 4.15 (Fonction indéfiniment dérivable et à support compact)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0, \text{ si } x \leq -1,$$
$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}, \text{ si } -1 < x < 1,$$
$$f(x) = 0, \text{ si } x \geq 1.$$

1. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$

2. (a) Montrer que f est de classe C^{∞} sur $]-1, 1[$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. Montrer qu'il existe deux polynômes p_n et q_n t.q.:

   $$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} e^{\frac{1}{x^2-1}}, \text{ pour tout } -1 < x < 1.$$

   (On ne demande de calculer p_n et q_n mais seulement de montrer leur existence.)

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. Montrer que $\lim_{x\to 1, x<1} f^{(n)}(x) = 0$.

3. Montrer que f est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$. [On pourra utiliser le résultat suivant, vu en cours et en TD : Soit $-\infty \leq b < a < c \leq \infty$ et g une application de $]b, c[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est dérivable pour tout $x \in]b, c[$, $x \neq a$, et que g' (définie sur $]b, c[\setminus\{a\}$) admet une limite en a, notée l. Alors, g est dérivable en a et $g'(a) = l$.]

4. Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$, donner le développement limité de f, à l'ordre n, au point 1.

Exercice 4.16 (Calcul de limites)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = (x^2 + 1)^{\alpha} - (x^2 + 2)^{\alpha}$.

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ dans les cas simples suivants : $\alpha = 2$, $\alpha = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$.

2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (en justifiant les calculs). [distinguer les cas $0 < \alpha < 1$ et $\alpha > 1$.]

Exercice 4.17 (Dérivabilité d'un quotient, utilisation des développements limités)

Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et de dérivée continue). On suppose que $f(0) = g(0) = 0$ et $g(x) \neq 0$ si $x \neq 0$. Pour tout $x \neq 0$, on peut donc définir $h(x)$ en posant :

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

1. On suppose, dans cette question, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x^3$. Montrer que $\lim_{x\to 0} h(x) = +\infty$.

Dans la suite de l'exercice on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{x\to 0} h(x) = a$ et on pose $h(0) = a$.

2. Montrer que h est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en tout point x de $\mathbb{R}^{\star}$. Pour $x \neq 0$, donner $h'(x)$ en fonction de $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ et $g'(x)$.

3. On suppose que $g'(0) \neq 0$. Montrer que $\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{f'(0)}{g'(0)}$ (et donc que $a = \frac{f'(0)}{g'(0)}$).

4. On considère, dans cette question, les fonctions f et g suivantes :
$$f(x) = x + x^2, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} x + x^2, \text{ si } x \geq 0, \\ x - x^2, \text{ si } x < 0. \end{cases}$$
Montrer que f et g sont bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) \neq 0$. Donner la limite de $h(x)$ quand $x \to 0$. Montrer que h n'est pas dérivable en 0.

5. On considère, dans cette question, les fonctions f et g suivantes (de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$):
$$f(x) = \ln(1 + x^2), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = x(2 + \sin x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$
Donner la limite de $h(x)$ quand $x \to 0$. Montrer que h est dérivable en 0 et que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

6. On suppose maintenant que f et g sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) \neq 0$.
   (a) Montrer que h est dérivable en 0 et calculer $h'(0)$ en fonction de $f'(0)$, $g'(0)$, $f''(0)$ et $g''(0)$.
   (b) Montrer que h' est continue en 0 et en déduire que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

7. On ne suppose plus que $g'(0) \neq 0$ mais on suppose que f et g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $n \geq 1$ t.q. $g^{(n)}(0) \neq 0$ et, pour tout $k < n$, $g^{(k)}(0) = 0$. (On suppose toujours que $\lim_{x\to 0} h(x) = a$.)
   (a) Montrer que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k < n$.
   (b) Montrer que $a = \frac{f^{(n)}(0)}{g^{(n)}(0)}$.
   (c) Montrer que h est dérivable en 0 et calculer $h'(0)$ en fonction de $f^{(n)}(0)$, $g^{(n)}(0)$, $f^{(n+1)}(0)$ et $g^{(n+1)}(0)$.
   (d) Montrer que h' est continue en 0 et en déduire que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.18 (Développement limité curieux)
On dï¿œfinit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par:
$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0, \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $u > 0$, $e^u \geq \dfrac{u^q}{q!}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer, en utilisant la question prï¿œcï¿œdente, que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^n} = 0$. En dï¿œduire que f admet un dï¿œveloppement limitï¿œ d'ordre n en 0 et donner ce dï¿œveloppement.

Exercice 4.19 (Etude de la fonction $x \mapsto x \arctan x$)
Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x \arctan x, \; x \in \mathbb{R}.$$
[Montrer que f est paire. Calculer f' et f". Etudier les asymptotes.]

Exercice 4.20 (Etude d'une fonction (3))

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a(1+x^2)^{\frac{1}{x}} - \cos x$$

1. Calculer en fonction de a la limite de f en 0. En déduire que f peut être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$.

   Dans la suite, on note de nouveau f ce prolongement à $\mathbb{R}$. On note C_f le graphe de f.

2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser en fonction de a la dérivée de f en 0.
4. Donner la tangente à C_f en $(0, f(0))$ et préciser en fonction de a la position locale de C_f par rapport à cette tangente.

Exercice 4.21 (Maximum/minimum)

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction.
   (a) On suppose dans cette question que f est deux fois dérivable et que pour tout $x \in [a,b]$, $f''(x) \leq 0$. Montrer que pour tout x, on a $f(x) \geq \min\{f(a), f(b)\}$.
   (b) On suppose maintenant que f est une seule fois dérivable et que f atteint son maximum en a. Montrer que $f'(a) \leq 0$. Donner un exemple de cette situation où on a $f'(a) < 0$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit a un nombre réel.
   (a) On suppose que f est de classe C^4. Si $f'(a) = f''(a) = f^{(3)}(a) = 0$ et $f^{(4)}(a) \neq 0$, montrer que f a un maximum ou minimum local en a.
   (b) On suppose que f est de classe C^3. Si $f'(a) = f''(a) = 0$ et $f^{(3)}(a) \neq 0$, montrer que f n'a ni maximum ni minimum local en a.
   (c) On suppose que f est seulement continue et qu'elle tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Montrer que f est minorée et qu'elle atteint sa borne inférieure.

Exercice 4.22 (Limites)

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+2} + x, \qquad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+2} + x,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{\sin x - x}.$$

2. Calculer

$$l = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x.$$

   Donner un équivalent de $l - \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 4.23 (Calcul approché de $\sin(1)$**)**

Donner une valeur approchée de $\sin(1)$ à 10^{-6}-près, c'est-à-dire donner un nombre réel l tel que $|\sin(1) - l| \leq 10^{-6}$. [On pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange à un ordre convenable à déterminer ; on remarquera que le reste dans cette formule se borne facilement.]

Exercice 4.24 (Quotient différentiel pour approcher f''**)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit a un réel fixé. Pour $h \neq 0$, on pose

$$\Delta(h) = \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

1. On suppose que f est de classe C^2. Montrer que $\Delta(h)$ tend vers $f''(a)$ lorsque h tend vers 0.
2. On suppose que f est de classe C^3 et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. pour tout réel x, on ait $|f^{(3)}(x)| \leq M$. Montrer que pour tout $h \neq 0$, on a
$$|\Delta(h) - f''(a)| \leq Mh/3.$$

Exercice 4.25 (Une fonction analytique s'annule rarement. . .) Soit f une fonction analytique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f n'est pas identiquement nulle (c'est-à-dire qu'il existe $z \in \mathbb{R}$ t.q. $f(z) \neq 0$). On note $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } f(x) = 0\}$.

1. Montrer que A ne contient aucun intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $p \geq 1$ t.q. $f^{(p)}(a) \neq 0$.

Exercice 4.26 (Inégalité de Lojasiewicz) Soit f une fonction analytique $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f n'est pas identiquement nulle. On suppose aussi que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. Soit $p \in \mathbb{N}$ t.q. $f^{(i)}(0) = 0$ pour $i < p$ et $f^{(p)}(0) \neq 0$. (Un tel p existe d'après l'exercice 4.25.) Montrer qu'il existe $\gamma > 0$ et $R > 0$ tels que

$$|f(x)|^{1-\frac{1}{p}} \leq \gamma |f'(x)| \text{ si } |x| \leq R.$$

[On pourra utiliser le développement de Taylor de f en 0 et les propriétés vues dans la remarque 4.3.]

4.8 Exercices corrigés

Exercice 4.27 (Corrigé de l'exercice 4.1)

On définit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}, \text{ si } x > 0,$$
$$f(x) = 0, \text{ si } x \leq 0.$$

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$.

corrigé

Sur $]-\infty, 0[$, f est constante et est donc de classe C^∞.

Sur $]0, +\infty[$, f est de classe C^∞ car c'est la composée de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$, qui est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, et de $x \mapsto e^x$, qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme p_n t.q.

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}, \text{ si } x > 0.$$

corrigé

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $n = 0$, on a bien, pour $x > 0$, $f(x) = \frac{p_0(x)}{x^0} e^{-\frac{1}{x}}$ en prenant pour p_0 le polynôme constant et égal à 1.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un polynôme p_n t.q.

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}, \text{ si } x > 0.$$

On a alors, pour $x > 0$:

$$f^{(n+1)}(x) = (\frac{p_n'(x)}{x^{2n}} - 2n\frac{p_n(x)}{x^{2n+1}} + \frac{1}{x^2}\frac{p_n(x)}{x^{2n}})e^{-\frac{1}{x}}.$$

On en déduit que $f^{(n+1)}(x) = \frac{p_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} e^{-\frac{1}{x}}$, avec $p_{n+1}(x) = x^2 p_n'(x) - 2nxp_n(x) + p_n(x)$. La fonction p_{n+1} est bien un polynôme (car p_n et p_n' sont des polynômes).

On a bien ainsi montré, par récurrence sur n, que $f^{(n)}$ a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la forme demandée.

---

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Soit $p \in \mathbb{Z}$, Montrer que :

$$\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p} = 0.$$

   [On rappelle que $e^u \geq \frac{u^q}{q!}$ pour tout $u > 0$ et tout $q \in \mathbb{N}$.]

corrigé

On démontre tout d'abord le rappel. Soit $q \in \mathbb{N}$ et $u > 0$. La formule de Taylor-Lagrange (formule (4.1)) donne qu'il existe $c \in]0, u[$ t.q. :

$$e^u = \sum_{k=0}^{q} \frac{u^k}{k!} + \frac{u^{q+1}}{(q+1)!} e^c.$$

Comme tous les termes du membre de droite de cette égalité sont positifs, on en déduit que $e^u \geq \frac{u^q}{q!}$.

Pour montrer que $\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p} = 0$ (noter que $p \in \mathbb{Z}$) on distingue deux cas.

cas 1. On suppose $p \leq 0$. Dans ce cas, il est immédiat que $\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p} = 0$.

Cas 2. On suppose $p > 0$. Pour $x > 0$, on utilise alors l'inégalité $e^u \geq \frac{u^q}{q!}$ avec $q = p + 1$ et $u = \frac{1}{x}$. On obtient $(p+1)!\, e^{\frac{1}{x}} \geq x^{-(p+1)}$ et donc :

$$0 \leq \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p} \leq (p+1)!\, x, \text{ pour tout } x > 0.$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p} = 0$.

(b) Montrer que $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$.

corrigé

On a $\lim_{x\to 0, x<0} f^{(n)}(x) = 0$ (car $f^{(n)}(x) = 0$ si $x < 0$). On a aussi $\lim_{x\to 0, x>0} f^{(n)}(x) = 0$ car, pour $x > 0$ on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}},$$

et on a $\lim_{x\to 0} p_n(x) = p_n(0) \in \mathbb{R}$ et, d'après la question 3(a), $\lim_{x\to 0, x>0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2n}} = 0$.

---

4. Montrer que f est de classe C^∞ (sur $\mathbb{R}$).

corrigé

On sait déjà (question 1) que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^\star$. Pour montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, il suffit, d'après la question 2 de l'exercice 3.12, de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) en 0. Ceci a été démontré dans la question précédente. L'exercice 3.12 donne donc que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Cette question montre aussi que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

5. Montrer que f n'est pas analytique.

corrigé

La fonction f n'est pas analytique car $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors que $f(x) \neq 0$ pour tout $x > 0$. Pour tout $x > 0$, $f(x)$ est donc différent de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$.

Exercice 4.28 (Corrigé de l'exercice 4.8)

Soit f une application $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est de classe C^1 et que f admet un minimum local en a. Montrer que $f'(a) = 0$.

corrigé

Comme f admet un minimum local en a, il existe $\gamma > 0$ t.q. :

$$|h| \leq \gamma \Rightarrow f(a+h) \geq f(a).$$

On remarque maintenant que $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Or, pour $0 < h < \gamma$, on a $f(a+h) \geq f(a)$ et donc $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$. On en déduit, en faisant tendre h vers 0 :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0.$$

De même, pour pour $-\gamma < h < 0$, on a $f(a+h) \geq f(a)$ et donc $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0$. On en déduit, en faisant tendre h vers 0 :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0, h<0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0.$$

Finalement, on a bien montré que $f'(a) = 0$.

---

2. On suppose que f est de classe C^2, $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$. Montrer que f admet un minimum local en a.

corrigé

Comme $f''(a) > 0$ et que f'' est continue, il existe $\gamma > 0$ t.q. :

$$|x - a| \le \gamma \Rightarrow f''(x) > 0.$$

(En effet, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2} f''(a)$, la continuité de f'' en a donne l'existence de $\gamma > 0$ t.q. $|x-a| \le \gamma$ implique $|f''(x) - f''(a)| \le \frac{1}{2} f''(a)$ et donc $f''(x) \ge \frac{1}{2} f''(a) > 0$.)

Soit maintenant $h \neq 0$ t.q. $|h| \le \gamma$. La formule de Taylor-Lagrange (formule (4.1)) donne l'existence de x (strictement) entre a et $a + h$ t.q. :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(x).$$

Comme $f'(a) = 0$ et $f''(x) > 0$ (car $|x - a| < |h| \le \gamma$), on a donc $f(a+h) > f(a)$. On a donc montré l'existence de $\gamma > 0$ t.q. :

$$|h| \le \gamma \Rightarrow f(a+h) \ge f(a).$$

Ceci prouve que f admet un minimum local en a.

---

3. Donner un exemple pour lequel f est de classe C^2, $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ et f n'admet pas un minimum local en a.

corrigé

On prend $a = 0$ et $f(x) = x^3$. On a bien f de classe C^2, $f'(0) = f''(0) = 0$ et f n'admet pas un minimum local en 0 (car $f(x) < f(0)$ pour tout $x < 0$).

Exercice 4.29 (Corrigé de l'exercice 4.16)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = (x^2 + 1)^\alpha - (x^2 + 2)^\alpha$.

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ dans les cas simples suivants : $\alpha = 2$, $\alpha = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$.

corrigé

- Cas $\alpha = 2$. Dans ce cas, on a $f(x) = 2x^2+1-4x^2-4 = -2x^2-3$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
- Cas $\alpha = 1$. Dans ce cas, on a $f(x) = -1$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$.
- Cas $\alpha = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, on a :

$$f(x) = \frac{((x^2+1)^{\frac{1}{2}} - (x^2+2)^{\frac{1}{2}})((x^2+1)^{\frac{1}{2}} + (x^2+2)^{\frac{1}{2}})}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + (x^2+2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + (x^2+2)^{\frac{1}{2}}}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

---

2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (en justifiant les calculs). [distinguer les cas $0 < \alpha < 1$ et $\alpha > 1$.]

corrigé

Pour $u > -1$, on pose $\varphi(u) = (1+u)^\alpha$. Pour $x > 0$, on a donc $f(x) = x^{2\alpha}(\varphi(\frac{1}{x^2}) - \varphi(\frac{2}{x^2}))$.

La fonction φ est de classe C^∞ sur l'ensemble $]-1,+\infty[$ et on a $\varphi'(u) = \alpha(1+u)^{\alpha-1}$ pour tout $u > -1$. Le DL1 de φ en 0 est donc :

$$\varphi(u) = 1 + \alpha u + u\varepsilon(u), \text{ pour tout } u > -1,$$

avec $\lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$. On a donc, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = x^{2\alpha}(\frac{\alpha}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x^2}) - \frac{2\alpha}{x^2} - \frac{2}{x^2}\varepsilon(\frac{2}{x^2}) = x^{2\alpha}(-\frac{\alpha}{x^2} + \frac{1}{x^2}\eta(x)),$$

avec $\eta(x) = \varepsilon(\frac{1}{x^2}) - 2\varepsilon(\frac{2}{x^2})$ et donc $\lim_{x\to+\infty} \eta(x) = 0$ (car $\lim_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0$). On en déduit :

$$f(x) = x^{2(\alpha-1)}(-\alpha + \eta(x)).$$

Comme $\lim_{x\to+\infty}(-\alpha+\eta(x)) = -\alpha$, on a donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si $\alpha > 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ si $0 < \alpha < 1$.

Exercice 4.30 (Corrigé de l'exercice 4.17)

Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et de dérivée continue). On suppose que $f(0) = g(0) = 0$ et $g(x) \neq 0$ si $x \neq 0$. Pour tout $x \neq 0$, on peut donc définir $h(x)$ en posant :

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

1. On suppose, dans cette question, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x^3$. Montrer que $\lim_{x\to 0} h(x) = +\infty$.

corrigé

Le $DL1$ de f en 0 est $f(x) = x + x\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. On a donc, pour $x \neq 0$, $h(x) = \frac{1+\varepsilon(x)}{x^2}$. On en déduit bien que $\lim_{x\to 0} h(x) = +\infty$.

Dans la suite de l'exercice on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{x\to 0} h(x) = a$ et on pose $h(0) = a$.

2. Montrer que h est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en tout point x de $\mathbb{R}^\star$. Pour $x \neq 0$, donner $h'(x)$ en fonction de $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ et $g'(x)$.

corrigé

La fonction h est le quotient de deux fonctions de classe C^1. Comme la fonction au dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^\star$, la fonction h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$ et on a :

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^\star.$$

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^\star$. D'autre part, elle est aussi continue en 0 car $\lim_{x\to 0} h(x) = a = h(0)$. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

---

3. On suppose que $g'(0) \neq 0$. Montrer que $\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{f'(0)}{g'(0)}$ (et donc que $a = \frac{f'(0)}{g'(0)}$).

corrigé

Les $DL1$ de f et g en 0 donnent $f(x) = xf'(0)+x\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = xg'(0)+x\varepsilon_2(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_i(x) = 0$, pour $i = 1, 2$. On a donc, pour $x \neq 0$, $h(x) = \frac{f'(0)+\varepsilon_1(x)}{g'(0)+\varepsilon_2(x)}$. On en déduit bien que $\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{f'(0)}{g'(0)}$ (on vient ainsi de redémontrer un cas particulier de la règle de l'Hôpital).

---

4. On considère, dans cette question, les fonctions f et g suivantes :

$$f(x) = x + x^2, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} x + x^2, \text{ si } x \geq 0, \\ x - x^2, \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que f et g sont bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) \neq 0$. Donner la limite de $h(x)$ quand $x \to 0$. Montrer que h n'est pas dérivable en 0.

corrigé

La fonction f étant un polynôme, elle est de classe C^1 (et même de classe C^∞) sur $\mathbb{R}$. De même, la fonction g est de classe C^1 (et même de classe C^∞) sur $\mathbb{R}_+^\star$ et sur $\mathbb{R}_-^\star$ (car c'est un polynôme sur $\mathbb{R}_+^\star$ et sur $\mathbb{R}_-^\star$). Pour montrer que g est dérivable en 0 on remarque que

$$\lim_{x\to 0, x>0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0, x>0} 1 + x = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0, x<0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0, x<0} 1 - x = 1.$$

On en déduit bien que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 1$. Enfin, on a g' continue en 0 car $g'(x) = 1 + 2|x|$ pour $x \neq 0$ et donc $\lim_{x\to 0} g'(x) = g'(0)$. La fonction g est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On a $\lim_{x\to 0} h(x) = 1$ et donc $h(0) = 1$. Pour $x \neq 0$, on a $h(x) - h(0) = h(x) - 1 = \frac{f(x)-g(x)}{g(x)}$. On a donc $h(x) - 1 = 0$ si $x > 0$ et $h(x) - 1 = \frac{2x}{1-x}$ si $x < 0$. On en déduit :

$$\lim_{x\to 0, x>0} \frac{h(x)-1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0, x<0} \frac{h(x)-1}{x} = 2.$$

Ce qui prouve que h n'est pas dérivable en 0.

---

5. On considère, dans cette question, les fonctions f et g suivantes (de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$):

$$f(x) = \ln(1 + x^2), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = x(2 + \sin x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Donner la limite de $h(x)$ quand $x \to 0$. Montrer que h est dérivable en 0 et que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

corrigé

Le $DL1$ en 0 de la fonction $u \mapsto \ln(1 + u)$ (définie sur $]-1, +\infty[$) est $\ln(1 + u) = u + u\varepsilon_1(u)$ avec $\lim_{u\to 0} \varepsilon_1(u) = 0$. On a donc $f(x) = x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ (car $\varepsilon_2(x) = \varepsilon_1(x^2)$). Ceci donne :

$$h(x) = \frac{x + x\varepsilon_2(x)}{2 + \sin(x)} \text{ pour tout } x \neq 0.$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$ et donc $h(0) = 0$.

On remarque maintenant que $\frac{h(x)}{x} = \frac{1+\varepsilon_2(x)}{2+\sin(x)}$ et donc $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x} = \frac{1}{2}$. Ceci montre que h est dérivable en 0 et $h'(0) = \frac{1}{2}$.

On sait déjà que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$ (voir la question 2). Pour montrer que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de montrer que h' est continue en 0, c'est-à-dire que $\lim_{x\to 0} h'(x) = \frac{1}{2}$. Pour $x \neq 0$, on a :

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = \frac{1}{g^2(x)}(g(x)f'(x) - g'(x)f(x)).$$

Or $g(x)f'(x) - g'(x)f(x) = \frac{2x^2(2+\sin x)}{1+x^2} - (x^2 + x^2\varepsilon_2(x))(2 + \sin x + x\cos x)$ et donc :

$$h'(x) = \frac{1}{(2+\sin x)^2}\left(\frac{2(2+\sin x)}{1+x^2} - (1+\varepsilon_2(x))(2+\sin x + x\cos x)\right).$$

Ce qui donne $\lim_{x\to 0} h'(x) = \frac{1}{4}(4-2) = \frac{1}{2}$ et montre la continuité de h' en 0.

---

6. On suppose maintenant que f et g sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) \neq 0$.

(a) Montrer que h est dérivable en 0 et calculer $h'(0)$ en fonction de $f'(0)$, $g'(0)$, $f''(0)$ et $g''(0)$.

corrigé

Pour $x \neq 0$, on pose $\varphi(x) = \frac{1}{x}(h(x) - h(0))$. Comme $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ et $h(0) = \frac{f'(0)}{g'(0)}$ on a donc :

$$\varphi(x) = \frac{1}{xg(x)g'(0)}\left(f(x)g'(0) - g(x)f'(0)\right) \text{ pour tout } x \neq 0.$$

Les $DL1$ et $DL2$ en 0 de g et le $DL2$ en 0 de f donnent :

$$g(x) = xg'(0) + x\varepsilon_1(x),\ g(x) = xg'(0) + \frac{x^2}{2}g''(0) + x^2\varepsilon_2(x),\ f(x) = xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + x^2\varepsilon_3(x),$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_i(x) = 0$, pour $i = 1, 2, 3$. On a donc, pour $x \neq 0$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{(g'(0) + \varepsilon_1(x))g'(0)}\left((\frac{f''(0)}{2} + \varepsilon_3(x))g'(0) - (\frac{g''(0)}{2} + \varepsilon_2(x))f'(0)\right).$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \frac{f''(0)g'(0) - g''(0)f'(0)}{2(g'(0))^2}$ et donc que h est dérivable en 0 et :

$$h'(0) = \frac{f''(0)g'(0) - g''(0)f'(0)}{2(g'(0))^2}.$$

(b) Montrer que h' est continue en 0 et en déduire que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

corrigé

Comme à la question 5, on sait déjà que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$ (question 2). Pour montrer que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de montrer que h' est continue en 0. Pour $x \neq 0$, on a :

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = \frac{1}{g^2(x)}(g(x)f'(x) - g'(x)f(x)).$$

On utilise les DL de f et g écrits en (a), et les $DL1$ en 0 de f' et g', c'est-à-dire $f'(x) = f'(0) + xf''(0) + x\varepsilon_4(x)$ et $g'(x) = g'(0) + xg''(0) + x\varepsilon_5(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_i(x) = 0$, pour $i = 4, 5$. On obtient :

$$g(x)f'(x) = (xg'(0) + \frac{x^2 g''(0)}{2} + x^2\varepsilon_2(x))(f'(0) + xf''(0) + x\varepsilon_4(x))$$

et

$$g'(x)f(x) = (g'(0) + xg''(0) + x\varepsilon_5(x))(xf'(0) + \frac{x^2 f''(0)}{2} + x^2\varepsilon_3(x)).$$

On en déduit :

$$g(x)f'(x) - g'(x)f(x) = \frac{x^2}{2}(g'(0)f''(0) - g''(0)f'(0)) + x^2\varepsilon_6(x),$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_6(x) = 0$. Ceci donne :

$$h'(x) = \frac{1}{(g'(0) + \varepsilon_1(x))^2} \left(\frac{g'(0)f''(0) - g''(0)f'(0)}{2} + \varepsilon_6(x) \right),$$

et donc $\lim_{x\to 0} h'(x) = \frac{g'(0)f''(0) - g''(0)f'(0)}{2(g'(0))^2} = h'(0)$. La fonction h' est donc bien continue en 0 et on en déduit que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

---

7. On ne suppose plus que $g'(0) \neq 0$ mais on suppose que f et g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $n \geq 1$ t.q. $g^{(n)}(0) \neq 0$ et, pour tout $k < n$, $g^{(k)}(0) = 0$. (On suppose toujours que $\lim_{x\to 0} h(x) = a$.)

   (a) Montrer que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k < n$.

   corrigé

   On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $k < n$ t.q. $f^{(k)}(0) \neq 0$. On pose alors $l = \min\{k \in \mathbb{N} \text{ t.q. } f^{(k)}(0) \neq 0\}$. On a donc $1 \leq l < n$, $f^{(l)}(0) \neq 0$ et $f^{(k)}(0) = 0$ pour $k < l$. Le DLl en 0 de f et le DLn en 0 de g donnent :

$$f(x) = \frac{x^l}{l!} f^{(l)}(0) + x^l \eta_1(x),\ g(x) = \frac{x^n}{n!} g^{(n)}(0) + x^n \eta_2(x),$$

   avec $\lim_{x\to 0} \eta_i(x) = 0$, pour $i = 1, 2$. On en déduit, pour $x \neq 0$,

$$h(x) = \frac{\frac{x^l}{l!} f^{(l)}(0) + x^l \eta_1(x)}{\frac{x^n}{n!} g^{(n)}(0) + x^n \eta_2(x)} = x^{l-n} \frac{\frac{1}{l!} f^{(l)}(0) + \eta_1(x)}{\frac{1}{n!} g^{(n)}(0) + \eta_2(x)}.$$

   Comme $l < n$, $f^{(l)}(0) \neq 0$ et $g^{(n)}(0) \neq 0$, on en déduit que $\lim_{x\to 0} |h(x)| = +\infty$, en contradiction avec le fait que $\lim_{x\to 0} |h(x)| = |a| \in \mathbb{R}$. On a donc bien montré, par contradiction, que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k < n$.

   (b) Montrer que $a = \frac{f^{(n)}(0)}{g^{(n)}(0)}$.

   corrigé

   Les DLn de f et g en 0 donnent $g(x) = \frac{x^n}{n!} g^{(n)}(0) + x^n \eta_2(x)$ et $f(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \eta_3(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \eta_i(x) = 0$, pour $i = 2, 3$. On a donc, pour $x \neq 0$:

$$h(x) = \frac{f^{(n)}(0) + n!\, \eta_3(x)}{g^{(n)}(0) + n!\, \eta_2(x)}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{g^{(n)}(0)}$ et donc que $a = \frac{f^{(n)}(0)}{g^{(n)}(0)}$.

(c) Montrer que h est dérivable en 0 et calculer $h'(0)$ en fonction de $f^{(n)}(0)$, $g^{(n)}(0)$, $f^{(n+1)}(0)$ et $g^{(n+1)}(0)$.

corrigé

On reprend la méthode de la question 6(a). Pour $x \neq 0$, on pose $\varphi(x) = \frac{1}{x}(h(x) - h(0))$. Comme $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ et $h(0) = \frac{f^{(n)}(0)}{g^{(n)}(0)}$ on a donc :

$$\varphi(x) = \frac{1}{xg(x)g^{(n)}(0)}\Big(f(x)g^{(n)}(0) - g(x)f^{(n)}(0)\Big) \text{ pour tout } x \neq 0.$$

Les DLn et $DL(n+1)$ en 0 de g et le $DL(n+1)$ en 0 de f donnent :

$$g(x) = \frac{x^n}{n!}g^{(n)}(0) + x^n\eta_4(x),\ g(x) = \frac{x^n}{n!}g^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+1)}(0) + x^{n+1}\eta_5(x),$$

$$f(x) = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0) + x^{n+1}\eta_6(x),$$

avec $\lim_{x\to 0}\eta_i(x) = 0$, pour $i = 4, 5, 6$. On a donc, pour $x \neq 0$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{(\frac{g^{(n)}(0)}{n!} + \eta_4(x))g^{(n)}(0)}\left((\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} + \eta_6(x))g^{(n)}(0) - (\frac{g^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} + \eta_5(x))f^{(n)}(0)\right).$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)g^{(n)}(0) - g^{(n+1)}(0)f^{(n)}(0)}{(n+1)(g^{(n)}(0))^2}$ et donc que h est dérivable en 0 et :

$$h'(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)g^{(n)}(0) - g^{(n+1)}(0)f^{(n)}(0)}{(n+1)(g^{(n)}(0))^2}.$$

(d) Montrer que h' est continue en 0 et en déduire que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

corrigé

On reprend la méthode de la question 6(b). Comme à la question 5, on sait déjà que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$ (question 2). Pour montrer que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de montrer que h' est continue en 0. Pour $x \neq 0$, on a :

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = \frac{1}{g^2(x)}(g(x)f'(x) - g'(x)f(x)).$$

On utilise les DL de f et g écrits en (c), et les DLn en 0 de f' et g', c'est-à-dire $f'(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n+1)}(0) + x^n\eta_7(x)$ et $g'(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!}g^{(n+1)}(0) + x^n\eta_8(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\eta_i(x) = 0$, pour $i = 7, 8$. On obtient :

$$g(x)f'(x) =$$
$$(\tfrac{x^n}{n!}g^{(n)}(0) + \tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+1)}(0) + x^{n+1}\eta_5(x))(\tfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(0) + \tfrac{x^n}{n!}f^{(n+1)}(0) + x^n\eta_7(x))$$

et

$$g'(x)f(x) =$$
$$(\tfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(0) + \tfrac{x^n}{n!}g^{(n+1)}(0) + x^n\eta_8(x))(\tfrac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0) + x^{n+1}\eta_6(x)).$$

On en déduit, en remarquant que $\frac{1}{n!\,n!} - \frac{1}{(n+1)!\,(n-1)!} = \frac{1}{n!\,(n+1)!}$:

$$g(x)f'(x) - g'(x)f(x) = \frac{x^{2n}}{n!\,(n+1)!}(g^{(n)}(0)f^{(n+1)}(0) - g^{(n+1)}(0)f^{(n)}(0)) + x^{2n}\eta_9(x),$$

avec $\lim_{x\to 0} \eta_9(x) = 0$. Ceci donne (avec η_4 définie en (c)) :

$$h'(x) = \frac{1}{(g^{(n)}(0) + n!\,\eta_4(x))^2}\left(\frac{g^{(n)}(0)f^{(n+1)}(0) - g^{(n+1)}(0)f^{(n)}(0))}{n+1} + (n!)^2\eta_9(x)\right),$$

et donc $\lim_{x\to 0} h'(x) = \frac{g^{(n)}(0)f^{(n+1)}(0)-g^{(n+1)}(0)f^{(n)}(0))}{(n+1)(g^{(n)}(0))^2} = h'(0)$. La fonction h' est donc bien continue en 0 et on en déduit que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.31 (Limite en $+\infty$)

Pour $x > 0$ on pose $f(x) = x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$. Déterminer $\lim_{x\to\infty} f(x)$. [On pourra, sur une une fonction convenable, utiliser un développement limité ou le théorème des accroissements finis.]

corrigé

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $y \mapsto e^y$ donne l'existence de $c \in]a, b[$ t.q. $e^b - e^a = (b-a)e^c$.

Pour tout $x > 0$, en prenant $a = \frac{1}{x+1}$ et $b = \frac{1}{x}$, il existe donc $c_x \in]\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}[$ t.q. :

$$f(x) = x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}) = x^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})e^{c_x} = \frac{x^2}{x(x+1)}e^{c_x}.$$

On a $\lim_{x\to\infty} c_x = 0$ (car $c_x \in]\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}[$ et donc $\lim_{x\to\infty} e^{c_x} = 1$.

On a aussi $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$. On en déduit que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Exercice 4.32 (Sur le Théorème des Accroissements Finis (TAF))

Rappel (TAF) : Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, pour tout $h \in]0, b-a[$, il existe $\theta \in]0, 1[$ t.q. :

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h). \tag{4.15}$$

1. Dans les quatre cas suivants, montrer que, pour tout $h \in]0, b-a[$, il existe un *unique* θ vérifiant (4.15) (les valeurs de a et b étant fixés). On note θ_h cette valeur de θ. Calculer θ_h (en fonction de a et h) et déterminer $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h$.

   (a) $0 < a < b < \infty$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in [a, b]$.

corrigé

Soit $\theta \in]0, 1[$ vérifiant (4.15) (l'existence d'au moins un θ est donnée par le TAF, on veut montrer ici son unicité et on cherche la limite de θ quand $h \to 0$, $h > 0$). La relation (4.15) donne :

$$\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = hf'(a+\theta h) = \frac{-h}{(a+\theta h)^2},$$

et donc $(a+\theta h)^2 = a(a+h)$, ce qui donne :

$$\theta = \frac{\sqrt{a(a+h)}-a}{h}.$$

Ceci prouve bien l'unicité de θ. En posant, pour $y > -a$, $\varphi(y) = \sqrt{a(a+y)}$, on a aussi $\theta_h = \frac{\sqrt{a(a+h)}-a}{h} = \frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}$ et donc :

$$\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h = \varphi'(0) = \frac{1}{2}.$$

(b) $0 < a < b < \infty$ et $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x \in [a,b]$.

corrigé

Soit $\theta \in]0,1[$ vérifiant (4.15). La relation (4.15) donne :

$$\frac{1}{\sqrt{a+h}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = hf'(a+\theta h) = \frac{-h}{2(a+\theta h)^{\frac{3}{2}}}.$$

On trouve donc ici

$$\theta = \frac{1}{h}\left[\left(\frac{h}{2}\frac{\sqrt{a}\sqrt{a+h}}{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}\right)^{\frac{2}{3}} - a\right].$$

Ceci prouve bien l'unicité de θ.

Pour trouver la limite quand h tend vers 0, avec $h > 0$, de θ_h, on peut utiliser des DL en a et la formule

$$\frac{1}{\sqrt{a+h}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{-h}{2(a+\theta_h h)^{\frac{3}{2}}}. \tag{4.16}$$

En effet, on a, en faisant un DL2 en a de $y \mapsto \frac{1}{\sqrt{y}}$ et un DL1 en a de $y \mapsto \frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{a+h}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = -\frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}h + \frac{3}{8a^{\frac{5}{2}}}h^2 + h^2\varepsilon_1(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h) = 0,$$

$$\frac{1}{(a+\bar{h})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2a^{\frac{5}{2}}}\bar{h} + \bar{h}\varepsilon_2(\bar{h}) \text{ avec } \lim_{\bar{h}\to 0}\varepsilon_2(\bar{h}) = 0,$$

ce qui donne aussi, comme $\theta_h \in]0,1[$,

$$\frac{1}{(a+\theta_h h)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2a^{\frac{5}{2}}}\theta_h h + h\varepsilon_3(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon_3(h) = 0.$$

En portant ces relations dans (4.16), on obtient :

$$-\frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}h + \frac{3}{8a^{\frac{5}{2}}}h^2 + h^2\varepsilon_1(h) = \frac{-h}{2}\left(\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2a^{\frac{5}{2}}}\theta_h h + h\varepsilon_3(h)\right),$$

ce qui donne, en divisant par h^2 :

$$\frac{3}{4a^{\frac{5}{2}}}(\frac{1}{2} - \theta_h) = -\varepsilon_1(h) - \frac{\varepsilon_3(h)}{2},$$

et donc $\lim_{h\to 0, h>0}\theta_h = \frac{1}{2}$. Cette question était plus difficile...

(c) $-\infty < a < b < \infty$ et $f(x) = e^x$ pour $x \in [a,b]$.

corrigé

Soit $\theta \in]0,1[$ vérifiant (4.15). La relation (4.15) donne :

$$e^a(e^h - 1) = e^{a+h} - e^a = hf'(a+\theta h) = he^{a+\theta h} = he^a e^{\theta h}.$$

On a donc $e^{\theta h} = \frac{e^h-1}{h}$, ce qui donne

$$\theta = \frac{1}{h}\ln(\frac{e^h-1}{h}).$$

Ceci prouve bien l'unicité de θ. On utilise maintenant un DL2 de $y \mapsto e^y$ en 0 :

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon_1(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h) = 0,$$

et donc

$$\frac{e^h-1}{h} = 1 + \frac{h}{2} + h\varepsilon_1(h).$$

Comme $\theta_h \in]0,1[$, le DL1 de $y \mapsto e^y$ en 0 donne aussi

$$e^{\theta_h h} = 1 + \theta_h h + h\varepsilon_2(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon_2(h) = 0.$$

On a donc (comme $e^{\theta h} = \frac{e^h-1}{h}$) :

$$1 + \theta_h h + h\varepsilon_2(h) = 1 + \frac{h}{2} + h\varepsilon_1(h).$$

d'où :

$$\theta_h - \frac{1}{2} = \varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h).$$

On obtient, finalement, $\lim_{h\to 0, h>0}\theta_h = \frac{1}{2}$.

(d) $-\infty < a < b < \infty$ et $f(x) = x^2 + x + 1$ pour $x \in [a,b]$.

corrigé

Soit $\theta \in]0,1[$ vérifiant (4.15). La relation (4.15) donne :

$$(a+h)^2 + h - a^2 = hf'(a+\theta h) = 2h(a+\theta h) + h,$$

ce qui donne

$$h^2 = 2h^2\theta,$$

et donc $\theta = \frac{1}{2}$. Ceci donne l'unicité de θ et $\lim_{h\to 0, h>0}\theta_h = \frac{1}{2}$.

---

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est de classe C^2. Soit $a \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^\star$ il existe $\theta \in]0,1[$ vérifiant (4.15) et donner un exemple de fonction f (et de valeurs de $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$) pour laquelle θ n'est pas unique.

corrigé

Si $h > 0$; on applique le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[a, a+h]$, il donne l'existence de $\theta \in]0,1[$ vérifiant (4.15). Si $h < 0$, on obtient le même résultat en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[a+h, a]$.

En prenant, par exemple, $f(x) = x$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$), on obtient un exemple pour lequel (4.15) est vraie pour tout $\theta \in]0,1[$ (et quelquesoit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$).

(b) On suppose que $f''(a) \neq 0$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^\star$, on choisit une valeur de $\theta \in]0,1[$ pour laquelle (4.15) est vérifiée. On note θ_h cette valeur de θ. Montrer que $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h = \frac{1}{2}$. [On pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange.]

corrigé

Soit $h \in \mathbb{R}^\star$. On appilque la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f. On obtient l'existence de $\varphi_h \in]0,1[$ t.q. :

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \frac{f''(a+\varphi_h h)}{2}h^2.$$

En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f', on obtient aussi l'existence de $\psi_h \in]0,1[$ t.q. :

$$f'(a+\theta_h h) = f'(a) + f''(a+\psi_h\theta_h h)\theta_h h.$$

Comme $f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta_h h)$, on a donc $\frac{f''(a+\varphi_h h)}{2} = f''(a+\psi_h\theta_h h)\theta_h$. Comme $f''(a) \neq 0$ et f'' continue, il existe $\eta > 0$ t.q., pour tout $y \in [a-\eta, a+\eta$, $f''(y) \neq 0$. On peut écrire, pour $h \in [-\eta, \eta]$:

$$\theta_h = \frac{f''(a+\varphi_h h)}{2f''(a+\psi_h\theta_h h)}.$$

La continuité de f'' et le fait que $f''(a) \neq 0$ permet alors d'en déduire que $\lim_{h\to 0, h>0} \theta_h = \frac{1}{2}$.

---

3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable (en tout point de $\mathbb{R}$) et que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$, (4.15) est vérifiée avec $\theta = \frac{1}{2}$.

(a) Montrer que $f(a+h) - f(a-h) = 2hf'(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$.

corrigé

Comme (4.15) est vraie avec $\theta = \frac{1}{2}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$, on peut l'appliquer (si $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$) avec $a-h$ et $2h$. on obtient

$$f(a-h+2h) - f(a-h) = 2hf'(a-h+\frac{1}{2}2h),$$

ce qui donne bien $f(a+h) - f(a-h) = 2hf'(a)$.

(b) Montrer que f est de classe C^∞. [On pourra, par exemple, utiliser (a) avec $h = 1$.]

corrigé

La question (a) donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$$f'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)).$$

On déduit de cette formule, par récurrence sur n que f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. En effet, comme f est continue, la formule donne bien que f' est continue, donc f est de classe C^1. Puis, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, si f est de classe C^n, la formule donne que f' est de classe C^n et donc f est de classe C^{n+1}.

On a bien montré ainsi, par récurrence, que f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. c'est-à-dire que f est de classe C^∞.

(c) Montrer que $f'''(a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. En déduire qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.q. :

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On suppose que (4.15) est, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$, vérifiée seulement pour $\theta = \frac{1}{2}$. Montrer que $\alpha \neq 0$.

corrigé

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$. Comme f est de classe C^3, la formule de Taylor-Lagrange donne l'existence de $\varphi_h, \psi_h \in]0,1[$ t.q. :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a+\varphi_h h)}{6}h^3,$$
$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a-\psi_h h)}{6}h^3.$$

Comme $f(a+h) - f(a-h) = 2hf'(a)$, on en déduit :

$$f'''(a+\varphi_h h) + f'''(a-\psi_h h) = 0.$$

En faisant tendre h vers 0, ceci donne $f'''(a) = 0$.

La formule de Taylor-Lagrange (en 0, à l'ordre 3) donne alors l'existence de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.q. :

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Si $\alpha = 0$, la formule (4.15) est vérifiée pour tout $\theta \in]0,1[$.Donc, si, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$, (4.15) est vérifiée seulement pour $\theta = \frac{1}{2}$, on a nécessairement $\alpha \neq 0$.

Exercice 4.33 (Etude d'une fonction (1))
Soit la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+\tan x)}{\sin x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en 0.

corrigé

On montre ci dessous continuité et dérivabilité de f en 0 en faisant un $DL2$ en 0 du numérateur et du dénominateur de la fraction définissant f (mais, bien sûr, d'autres preuves sont possibles).

Pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, on a $\tan x \in]-1,1[$ et $\tan x) = x + x^2\varepsilon_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$. Pour $u \in]-1,1[$, on a $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon_2(u)$ avec $\lim_{u\to 0} \varepsilon_2(u) = 0$. On en déduit, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$:

$$\ln(1+\tan x) = x + x^2\varepsilon_1(x) - \frac{(x+x^2\varepsilon_1(x))^2}{2} + (x+x^2\varepsilon_1(x))^2\varepsilon_2(x+x^2\varepsilon_1(x)),$$

et donc :
$$\ln(1+\tan x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0.$$
Pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, on a $\sin x = x + x^2\varepsilon_4(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0$, ce qui donne, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $x \neq 0$:
$$f(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x)}{x + x^2\varepsilon_4(x)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + x\varepsilon_3(x)}{1 + x\varepsilon_4(x)}.$$
On en déduit que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ et donc que f est continue (car $f(0) = 1$). Puis, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $x \neq 0$, on a :
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{-\frac{x}{2} + x\varepsilon_3(x) - x\varepsilon_4(x)}{x(1 + x\varepsilon_4(x))} = \frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon_3(x) - \varepsilon_4(x)}{1 + x\varepsilon_4(x)}$$
On a donc $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\frac{1}{2}$. Ce qui prouve que f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

---

2. Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

corrigé

Pour avoir un $DL2$ de f en 0, il suffit de faire un $DL3$ en 0 du numérateur et du dénominateur de la fraction définissant f. On procède comme à la question précédente.

Pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, on a $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + x^3\eta_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \eta_1(x) = 0$. Pour $u \in]-1, 1[$, on a $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3\eta_2(u)$ avec $\lim_{u\to 0} \eta_2(u) = 0$. On en déduit, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$:
$$\ln(1+\tan x) = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\eta_3(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \eta_3(x) = 0.$$
c'est-à-dire :
$$\ln(1+\tan x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + x^3\eta_3(x).$$
Pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, on a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\eta_4(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \eta_4(x) = 0$, ce qui donne, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $x \neq 0$:
$$f(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + x^3\eta_3(x)}{x - \frac{x^3}{6} + x^3\eta_4(x)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + x^2\eta_3(x)}{1 - \frac{x^2}{6} + x^2\eta_4(x)}.$$
On utilise maintenant que, pour $u \neq 1$, $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u\eta_5(u)$, avec $\lim_{u\to 0} \eta_5(u) = 0$. On obtient, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $x \neq 0$:
$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + x^2\eta_4(x)} = 1 + \frac{x^2}{6} + x^2\eta_6(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \eta_6(x) = 0.$$
Ce qui donne :
$$f(x) = (1 - \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + x^2\eta_3(x))(1 + \frac{x^2}{6} + x^2\eta_6(x)) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{6} + x^2\eta_7(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \eta_7(x) = 0.$$
On a ainsi obtenu le $DL2$ de f en 0.

---

3. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 et la position locale de la courbe de f par rapport à cette tangente.

—————————————corrigé—————————————

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour équation $g(x) = 1 - \frac{x}{2}$. La question précédente donne $f(x) - g(x) = \frac{5x^2}{6} + x^2\eta_7(x)$, avec $\lim_{x\to 0} \eta_7(x) = 0$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ t.q.

$$|x| \le \varepsilon \Rightarrow |\eta_7(x)| \le \frac{5}{6} \Rightarrow f(x) - g(x) \ge 0.$$

Ceci prouve que la courbe de f est, au voisinage de 0, au dessus de celle de g (qui est sa tangente en 0).

Exercice 4.34 (Etude d'une fonction (2))

On définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + \dfrac{\cos(x)}{x^2+1}$.

1. Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

—————————————corrigé—————————————

La fonction $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^2+1}$ est dérivable (et même de classe C^∞) car elle le quotient de deux fonctions dérivables (et de classe C^∞) et que la fonction au dénominateur ne s'annule pas. La fonction f est alors dérivable (et de classe C^∞) comme somme de fonctions dérivables (et de classe C^∞).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve $f'(x) = 3 - \frac{\sin(x)}{x^2+1} - \frac{2x\cos(x)}{(x^2+1)^2}$.

---

2. Montrer que f est strictement croissante.

—————————————corrigé—————————————

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{|\sin(x)|}{x^2+1} \le 1$$

et

$$\frac{2|x\cos(x)|}{(x^2+1)^2} \le \frac{2|x|}{(x^2+1)} \le 1$$

car $2|x| \le x^2 + 1$. On en déduit $f'(x) \ge 3 - 1 - 1 = 1 > 0$. Ce qui prouve que f est strictement croissante.

---

3. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

—————————————corrigé—————————————

La fonction f est strictement croissante, c'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image, notée $\mathrm{Im}(f)$. Pour montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, il suffit de remarquer que f est continue et que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Dans la suite, on note g la fonction réciproque de f (la fonction g est donc aussi une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

4. Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0 et donner ce développement.

corrigé

La fonction f est de classe C^2, elle admet donc un développement limité d'ordre 2 en 0. Pour le trouver, on remarque que :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) \text{ et } \frac{1}{x^2+1} = 1 - x^2 + x^2\varepsilon_2(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_i(x) = 0 \text{ pour } i = 1, 2.$$

On en déduit $f(x) = 1 + 3x - \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon_3(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0$.

Donner l'équation de la tangente (à la courbe de f) en 0 et la position locale de la courbe de f par rapport à cette tangente.

corrigé

La tangente (à la courbe de f) en 0 est $t(x) = 3x + 1$. O remarque que $f(x) - t(x) = \frac{\cos(x)}{x^2+1} - 1 \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La courbe de f est donc localement (et même globalement) en dessous de sa tangente en 0.

---

5. Montrer que g admet un développement limité d'ordre 2 en 1 et donner ce développement.

corrigé

La fonction f est de classe C^∞ et f' ne s'annule pas, on en déduit que la fonction g est aussi de classe C^∞. Pour avoir le développement limité de g d'ordre 2 en 1, on calcul $g(1)$, $g'(1)$ et $g"(1)$.

Comme $f(0) = 1$, on a $g(1) = 0$. puis $f'(x)g'(f(x)) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En prenant $x = 0$, comme $f'(0) = 3$, on a donc $3g'(1) = 1$ et $g'(1) = 1/3$. Enfin, on a $f"(x)g'(f(x)) + f'(x)^2g"(f(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En prenant $x = 0$, comme $f"(0) = -3$, on a donc $-3g'(1) + 9g"(1) = 0$, ce qui donne $g"(1) = 1/9$.

Le développement limité d'ordre 2 en 1 de g est donc $g(x) = \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{18}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 1}\varepsilon(x) = 0$.

---

6. Donner les asymptotes de f en $\pm\infty$.

corrigé

Comme $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - 3x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cos(x)}{x^2+1} = 0$, la fonction f admet pour asymptote en $\pm\infty$ la droite d'équation $x \mapsto 3x$.

---

7. montrer que $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ et donner les asymptotes de g en $\pm\infty$.

corrigé

La fonction g est (comme f) une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $g(x_0) = A$ et on a :

$$x \geq x_0 \Rightarrow g(x) \geq A.$$

Ceci prouve que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. De manière analogue, on a $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

Pour trouver les asymptotes de g, il suffit alors de remarquer que (comme $f \circ g(x) = x$) :

$$\lim_{x\to\pm\infty}(g(x)-\frac{1}{3}x)=\lim_{x\to\pm\infty}[g(x)-\frac{1}{3}f(g(x))]=\lim_{y\to\pm\infty}(y-\frac{1}{3}f(y))=\frac{1}{3}\lim_{y\to\pm\infty}(3y-f(y))=0.$$

La fonction g admet donc pour asymptote en $\pm\infty$ la droite d'équation $x \mapsto \frac{1}{3}x$.

Exercice 4.35 (Etude de $\ln(1-x)/x$**)**

1. Montrer que pour tout entier n, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ admet un développement limité à l'ordre n en zéro. Calculer explicitement ce développement pour $n = 2$.

corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe C^n sur l'intervalle $]-1,+\infty[$. Elle admet donc un développement limité à l'ordre n en zéro. Son développement limité à l'ordre 2 en zéro est

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x),\ \text{avec}\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$$

---

2. Soit $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$. Montrer que g se prolonge par continuité en zéro (à droite).

corrigé

Pour tout $x \in]0,1[0$, la question 1 donne $g(x) = 1 + \frac{1}{2}x - x\varepsilon(-x)$. On en déduit que g se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$.

Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \in]0,1[, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0,1[$.

corrigé

La fonction f est le quotient de deux fonctions de classe C^∞ sur $]0,1[$. La fonction qui est au dénominateur ne s'annule pas. On en déduit que f est aussi de classe C^∞ sur $]0,1[$.

---

4. Montrer que f est dérivable à droite en zéro et donner la valeur de cette dérivée (notée $f'(0)$).

corrigé

En utilisant une nouvelle fois la question 1, on remarque que, pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}-\varepsilon(-x).$$

On en déduit que f est dérivable à droite en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

---

5. Calculer la fonction dérivée f' sur $]0,1[$. La fonction f' est-elle continue en zéro ?

corrigé

Pour tout $x \in]0,1[$ on a $f'(x) = \frac{1}{x^2}\ln(1-x) + \frac{1}{x(1-x)}$. On utilise la question 1 et le fait que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x\eta(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\eta(x) = 0.$$

On obtient, pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \varepsilon(-x) + \frac{1}{x} + 1 + \eta(x)$ et donc

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \varepsilon(-x) + \eta(x).$$

Ceci donne $\lim_{x\to 0, x>0} f'(x) = \frac{1}{2} = f'(0)$. La fonction f' est donc continue en 0.

---

6. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a $\ln(1-x) + \frac{x}{1-x} \geq 0$. En déduire le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0,1[$.

corrigé

Pour $x \in [0,1[$, on pose $h(x) = \ln(1-x) + \frac{x}{1-x}$. La fonction h est continue sur $[0,1[$, elle est dérivable sur $]0,1[$ et on a, pour tout $x \in]0,1[$, $h'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} > 0$. La fonction h est donc strictement croissante et, comme $h(0) = 0$, on en déduit que $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1[$ et $h(x) > 0$ pour tout $x \in]0,1[$.

Comme $f'(x) = \frac{1}{x^2}h(x)$, pour tout $x \in]0,1[$, on a donc aussi $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0,1[$ (et donc aussi pour tout $x \in [0,1[$ car $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$).

---

7. Dresser le tableau de variations de f et tracer l'allure de son graphe sur $[0,1[$ (on pensera à calculer la limite de f en 1).

corrigé

La fonction f est continue sur $[0,1[$, dérivable sur $]0,1[$ (et dérivable à droite en 0). Sa dérivée est strictement positive sur $[0,1[$. La fonction f est donc strictement croissante. On a $f(0) = 1$ et $\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = +\infty$.

Exercice 4.36 (Calcul de limites)

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1-2x-2x^2}{x^3}$, $\quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)^{1/3}-(1+x)^{1/3}}{x}$.

corrigé

On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^3\varepsilon_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + (4/3)x^3 + x^3\varepsilon_2(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$. On en déduit que

$$\frac{e^{2x}-1-2x-2x^2}{x^3} = \frac{4}{3} + \varepsilon_2(x).$$

On a donc $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1-2x-2x^2}{x^3} = 4/3$.

Pour $x > -1/2$ on pose $f(x) = (1+2x)^{1/3} - (1+x)^{1/3}$. La fonction f est de classe C^∞. On remarque que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1/3$. On en déduit que $\lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)^{1/3}-(1+x)^{1/3}}{x} = 1/3$.

Exercice 4.37 (Point fixe obtenu par itération)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^x - 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. On définit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Dresser le tableau de variations de φ sur $\mathbb{R}$ (on pensera à calculer les limites en $\pm\infty$).

   corrigé

   La fonction φ est de classe C^∞. On a $\varphi'(x) = e^x - 1$. On a $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$ (en remarquant, par exemple, que $e^x \geq x + x^2/2$ pour tout $x > 0$). On en déduit le tableau de variation de φ

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$	-1	$-$	0	$+$	$+\infty$
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ a exactement deux solutions α_1 et α_2 sur $\mathbb{R}$, avec $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$. (On ne cherchera pas à calculer α_1 et α_2 de façon explicite.)
   Remarque. Les points α_1 et α_2 sont donc les uniques points fixes de f, c'est-à-dire les uniques solutions de l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.

   corrigé

   Sur l'intervalle $]-\infty, 0]$, la fonction φ est continue et strictement décroissante de $+\infty$ à -1. Elle s'annule donc une seule fois, en un point noté α_1. Sur l'intervalle $[0, +\infty[$, la fonction φ est continue et strictement croissante de -1 à $+\infty$. Elle s'annule donc une seule fois, en un point noté α_2. On a bien $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$.

   (c) Montrer que $\alpha_2 < 2$.

   corrigé

   On remarque que $\varphi(2) = e^2 - 4$. Or, pour tout $x > 0$, on a $e^x > 1 + x$ (c'est, par exemple, une conséquence du théorème des accroissements pour la fonction $x \mapsto e^x$ sur l'intervalle $[0, 1]$). On a donc (pour $x = 1$) $e > 2$. On en déduit $e^2 > 4$ et donc $\varphi(2) > 0$. Comme φ est croissante sur l'intervalle $[2, +\infty[$, on a donc $\varphi(x) > 0$ pour $x \geq 2$, ce qui montre que $\alpha_2 < 2$.

2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

   corrigé

   On remarque que $f'(x) = e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	$+\infty$
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Calculer u_1 et montrer (par récurrence) que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   corrigé

   $u_1 = f(0) = -1 \leq 0 = u_0$, ce qui permet d'initialiser la récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on suppose maintenant que $u_n \leq u_{n-1}$. Comme f est croissante, on a donc $f(u_n) \leq f(u_{n-1})$, ce qui donne $u_{n+1} \leq u_n$. On a bien montré, par récurrence, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq \alpha_1$.

corrigé

On raisonne encore par récurrence. On a $u_0 \geq \alpha_1$ (car $u_0 = 0$ et $\alpha_1 < 0$). Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n \geq \alpha_1$. Comme f est croissante, on a donc $f(u_n) \geq f(\alpha_1)$, ce qui donne $u_{n+1} \geq \alpha_1$ (car $f(\alpha_1) = \alpha_1$). On a bien montré, par récurrence, que $u_n \geq \alpha_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie.

corrigé

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée. Elle est donc convergente (dans $\mathbb{R}$).

(d) On note $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$. Montrer que $l = \alpha_1$.

corrigé

Comme $u_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $l \leq 0$. Puis comme $f(u_n) = u_{n+1}$ (pour tout n) et que f est continue, on obtient, quand $n \to +\infty$, $f(l) = l$. On en déduit que $l = \alpha_1$ (car α_1 est le seul point fixe de f dans l'intervalle $]-\infty, 0]$).

Exercice 4.38 (Dérivabilité de $\sin(x)/x$)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Rappeler pourquoi la fonction sinus admet un développement limité à l'ordre trois en 0 et donner explicitement ce développement.

corrigé

La fonction sinus est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, elle admet donc un développement limité à l'ordre trois en 0 . Ce développement limité est $\sin(x) = x - x^3/6 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

---

2. Montrer que f est dérivable en 0.

corrigé

Pour $x \neq 0$ on a (avec la question précédente)

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{\sin(x) - x}{x^2} = -\frac{x}{6} + x\varepsilon(x).$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0}{x - 0} = 0$ et donc que f est dérivable en 0 et $f'(0 = 0$.

Exercice 4.39 (Etude de $x^3/(1 + |x|)$)

On définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^3}{1 + |x|}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que f est continue et strictement croissante.

corrigé

La fonction f est continue car elle est formée par le quotient de deux fonctions continues et la fonction au dénominateur ne s'annule pas.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et sa dérivée est $f'(x) = \frac{3x^2+2|x|^3}{(1+|x|)^2}$. On a donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^\star$. Une application du théorème des accroissements finis donne alors que f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}$.

---

2. Montrer que $\{f(x),\, x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ et en déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

corrigé

Comme f est continue, $\{f(x),\, x \in \mathbb{R}\}$ est un intervalle. Pour montrer que cet intervalle est $\mathbb{R}$ tout entier, il suffit de remarquer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Enfin, comme f est strictement croissante, f est injective. Finalement, f est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

---

3. (Question difficile, inutile pour la suite) Montrer que f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

corrigé

On pose $h(x) = (1 + |x|)^{-1}$ de sorte que $f(x) = x^3 h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^\star$ et on a, pour $x \in \mathbb{R}^\star$, avec $\mathrm{sign}(x) = +1$ si $x > 0$ et $\mathrm{sign}(x) = -1$ si $x < 0$,

$$h'(x) = -\mathrm{sign}(x)(1 + |x|)^{-2},\ h''(x) = 2(1 + |x|)^{-3} \text{ et } h'''(x) = -6\mathrm{sign}(x)(1 + |x|)^{-4}.$$

La fonction f est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^\star$ et on a, pour $x \in \mathbb{R}^\star$,

$$f'(x) = 3x^2h(x) + x^3h'(x),\ f''(x) = 6xh(x) + 6x^2h'(x) + x^3h''(x),$$

et

$$f'''(x) = 6h(x) + 18xh'(x) + 9x^2h''(x) + x^3h'''(x).$$

De ces expressions, on déduit que $\lim_{x\to0} f'(x) = \lim_{x\to0} f''(x) = 0$ et $\lim_{x\to0} f'''(x) = 6$. Ceci permet de montrer (par un raisonnement vu en cours) que f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = f''(0) = 0$ et $f'''(0) = 6$.

---

4. Montrer que

$$f(x) = x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x) \text{ pour tout } x > 0,$$

$$f(x) = x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x) \text{ pour tout } x < 0,$$

avec $\lim_{x\to0} \varepsilon(x) = 0$. En déduire que f n'est pas de classe C^4 sur $\mathbb{R}$.

corrigé

On sait que pour tout $x \neq 0$ on a $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x\eta(x)$, avec $\lim_{x\to0} \eta(x) = 0$. On pose $\varepsilon(x) = \eta(x)$ si $x > 0$ et $\varepsilon(x) = -\eta(-x)$ si $x < 0$. On a alors $\lim_{x\to0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$f(x) = x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x) \text{ pour tout } x > 0,$$

$$f(x) = x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x) \text{ pour tout } x < 0.$$

Ceci montre que f n'a pas de développement limité d'ordre 4 en 0 et donc que f n'est pas de classe C^4 sur $\mathbb{R}$ (mais f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^\star$).

---

5. On note g la fonction réciproque de f (la fonction g est donc une fonction continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

   (a) Montrer que g est de classe C^3 sur $\mathbb{R}^\star$, mais non dérivable en 0.

   corrigé

   La fonction f est bijective de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$. Elle est de classe C^∞ et sa dérivée ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. On en déduit que g est aussi de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ (résultat vu en cours). Un raisonnement analogue montre que g est de classe C^∞ sur $]-\infty,0[$.

   Pour $x \neq 0$, on a
   $$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{g(x)}{x} = \frac{g(x)}{f(g(x))} = \frac{1+|g(x)|}{g(x)^2}. \tag{4.17}$$
   Comme $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (par continuité de g en 0), on a donc $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = +\infty$. Ce qui prouve que g n'est pas dérivable en 0.

   (b) La fonction g admet-elle un développement limité d'ordre 3 en 0 ?

   corrigé

   Si g admettait un développement limité d'ordre 3 en 0, g serait dérivable en 0, ce qui n'est pas le cas. Donc, g n'admet pas de développement limité d'ordre 3 en 0 (ni même d'ordre 1).

   (c) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. $\lim_{y\to 0, y>0} \frac{g(y)}{|y|^\alpha} = \lim_{y\to 0, y<0} \frac{g(y)}{-|y|^\alpha} = 1$ (et donner cette valeur de α).

   corrigé

   On reprend l'égalité (4.17). Elle donne, pour $x \neq 0$, $\dfrac{g(x)^3}{x} = 1 + |g(x)|$ et donc $\dfrac{g(x)}{\mathrm{sign}(x)|x|^{\frac{1}{3}}} = (1+|g(x)|)^{\frac{1}{3}}$. Comme $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, on a donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{\mathrm{sign}(x)|x|^{\frac{1}{3}}} = 1$. Ceci répond à la question posée avec $\alpha = \frac{1}{3}$.

Exercice 4.40 (Inégalité de Lojasiewicz, corrigé de l'exercice 4.26) Soit f une fonction analytique $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f n'est pas identiquement nulle. On suppose aussi que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. Soit $p \in \mathbb{N}$ t.q. $f^{(i)}(0) = 0$ pour $i < p$ et $f^{(p)}(0) \neq 0$. (Un tel p existe d'après l'exercice 4.25.) Montrer qu'il existe $\gamma > 0$ et $R > 0$ tels que
$$|f(x)|^{1-\frac{1}{p}} \leq \gamma |f'(x)| \text{ si } |x| \leq R.$$
[On pourra utiliser le développement de Taylor de f en 0 et les propriétés vues dans la remarque 4.3.]

corrigé

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = f^{(k)}(0)/k!$. Soit $\bar{R} > 0$ t.q.
$$|x| < \bar{R} \Rightarrow f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$
Comme cela a été dit dans la remarque 4.3, on a aussi
$$|x| < \bar{R} \Rightarrow f'(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

En utilisant la définition de p, on a alors

$$|x| < \bar{R} \Rightarrow f(x) = x^p g(x) \text{ avec } g(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=p}^{n} a_k x^{k-p},$$

et

$$|x| < \bar{R} \Rightarrow f'(x) = x^{p-1} h(x) \text{ avec } h(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=p}^{n} k a_k x^{k-p}.$$

On a donc

$$|f(x)|^{\frac{p-1}{p}} = |x|^{p-1} |g(x)|^{\frac{p-1}{p}}$$

et

$$|f'(x)| = |x|^{p-1} |h(x)|$$

Comme cela a été vu dans la remarque 4.3, les fonctions h et g sont continues, et même analytiques, dans la boule (ouverte) de centre a et de rayon $\bar{R}$. Comme $h(0) = pa_p \neq 0$, il existe $R < \bar{R}$ t.q.

$$B = \min_{x, |x| \leq R} |h(x)| > 0.$$

On pose alors

$$A = \max_{x, |x| \leq R} |g(x)|^{\frac{p-1}{p}},$$

et on prend $\gamma = A/B$. On a alors pour $|x| \leq R$,

$$|f(x)|^{\frac{p-1}{p}} \leq |x|^{p-1} A \leq |x|^{p-1} \gamma B \leq \gamma |f'(x)|.$$

Chapitre 5

Intégrale et primitives

5.1 Objectif

On cherche dans ce chapitre à construire l'opérateur réciproque de l'opérateur de dérivation. Les deux questions suivantes sont alors naturelles.

Question 1 : Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Existe-t-il une application F, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable et t.q. $F' = f$ (c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) ? Si une telle application F existe, on dit que F est une primitive de f.

Question 2 : Si F existe, dans la question 1, F est-elle unique ?

Réponse à la question 2 : Cette question est facile, F est unique à une constante additive près. On peut le voir comme conséquence du théorème des accroissements finis (théorème 3.2). Nous le verrons dans le théorème 5.2.

Réponse à la question 1 : Cette question est beaucoup plus difficile.

1. On va montrer que la réponse est "oui" si f est continue (le fait que f soit continue est donc une condition suffisante pour que f admette une primitive). Ceci sera vu dans le théorème 5.2.

2. Le fait que f soit continue n'est pas une condition nécessaire pour que f admette une primitive. Plus précisément, si f admet une primitive, on a donc $f = F'$, où F est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'exercice 3.6 montre alors que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Donc, le fait que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est une condition nécessaire pour que f admette une primitive. Cette condition est-elle suffisante ? (je ne sais pas..., on peut montrer que si f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, f n'est pas nécessairement localement intégrable, même au sens de Lebesgue, notion qui ne sera pas présentée dans ce document, mais cela ne permet pas de conclure.)

Résumé : L'objectif principal de ce chapitre est donc de démontrer que si f est continue de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$ $(-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty)$, alors f admet une primitive.

5.2 Intégrale des fonctions en escalier

Définition 5.1 (Fonctions en escalier) *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est "en escalier" si il existe $n \in \mathbb{N}^\star$, $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.q. :*

- $a = x_0 < \ldots < x_n = b$,
- $f(x) = \alpha_i$, *si* $x \in]x_{i-1}, x_i[$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

On note $E_{a,b}$ l'ensemble des fonctions en escalier sur l'intervalle $[a, b]$.

Remarque 5.1 Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $f \in E_{a,b}$. Soit $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.q. : $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ et $f(x) = \alpha_i$ si $x \in]x_{i-1}, x_i[$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.
On aimerait poser $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - x_{i-1})$. Est ce possible ? La difficulté est ici que les a_i et les α_i ne sont pas nécessairement uniques. Cette difficulté est résolue dans la proposition 5.1.

Proposition 5.1 *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $f \in E_{a,b}$.*

- *Soit $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.q. :*
  $a = x_0 < \ldots < x_n = b$, *et* $f(x) = \alpha_i$ *si* $x \in]x_{i-1}, x_i[$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- *Soit $y_0, \ldots, y_p \in [a, b]$ et $\beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{R}$ t.q. :*
  $a = y_0 < \ldots < y_p = b$ *et* $f(x) = \beta_i$ *si* $x \in]y_{i-1}, y_i[$, $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Alors, $\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^p \beta_i(y_i - y_{i-1})$.

Démonstration : On réunit l'ensemble des points x_i, $i \in \{0, \ldots, n\}$, et des points y_j, $j \in \{0, \ldots, p\}$, on a ainsi

$$\{z_0, \ldots, z_q\} = \{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{y_0, \ldots, y_p\}, \text{ avec } a = z_0 < \ldots < z_q = b.$$

(On a donc $\max\{n, p\} \le q \le n + p - 1$.) Sur l'intervalle $]z_{k-1}, z_k[$, $k \in \{1, \ldots, q\}$), la fonction f est constante, on note γ_k sa valeur. On va démontrer que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{k=1}^q \gamma_k(z_k - z_{k-1}). \tag{5.1}$$

Bien sûr, un raisonnement analogue donnerait $\sum_{i=1}^p \beta_i(y_i - y_{i-1}) = \sum_{k=1}^q \gamma_k(z_k - z_{k-1})$, ce qui permet de conclure la démonstration.

Pour montrer (5.1), on remarque que les points x_i, $i \in \{0, \ldots, n\}$, font partie des points z_k, $k \in \{0, \ldots, q\}$. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, il existe donc $k_i \in \{0, \ldots, q\}$ t.q. $x_i = z_{k_i}$. On a, en particulier, $k_0 = 0$ et $k_n = q$.

Soit maintenant $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a $x_i - x_{i-1} = z_{k_i} - z_{k_{i-1}} = \displaystyle\sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} z_k - z_{k-1}$, et donc

$$\alpha_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} \alpha_i(z_k - z_{k-1}).$$

Mais, pour tout $k \in \{k_{i-1}+1, \ldots, k_i\}$, on a $]z_{k-1}, z_k[\subset]x_{i-1}, x_i[$ et donc $\gamma_k = \alpha_i$. On en déduit que

$$\alpha_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} \gamma_k(z_k - z_{k-1}).$$

On somme maintenant sur i cette égalité et on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} \gamma_k(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{q} \gamma_k(z_k - z_{k-1}).$$

Ce qui donne bien (5.1) et conclut la démonstration (car, comme cela a déjà été dit, un raisonnement analogue donnerait $\sum_{i=1}^{p} \beta_i(y_i - y_{i-1}) = \sum_{k=1}^{q} \gamma_k(z_k - z_{k-1})$). ■

Définition 5.2 (Intégrale des fonctions en escalier) *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $f \in E_{a,b}$ (voir la définition 5.1). Soit $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.q. :*
$a = x_0 < \ldots < x_n = b$ et $f(x) = \alpha_i$, si $x \in]x_{i-1}, x_i[$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.
On pose $T(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i - x_{i-1})$.

Voici des propriétés élémentaires sur $E_{a,b}$ et sur l'opérateur T.

Proposition 5.2 (Propriétés de l'intégrale sur $E_{a,b}$)
Soit $-\infty < a < b < \infty$, Alors (avec les définitions 5.1 et 5.2):

1. *$E_{a,b}$ est un e.v. sur $\mathbb{R}$,*
2. *T est une application linéaire de $E_{a,b}$ dans $\mathbb{R}$,*
3. *$f, g \in E_{a,b}$, $f \geq g \Rightarrow T(f) \geq T(g)$,*
4. *$f \in E_{a,b} \Rightarrow |f| \in E_{a,b}$ et $|T(f)| \leq T(|f|)$.*

N.B. La notation "$f \geq g$" signifie "$f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$". La fonction $|f|$ est définie par $|f|(x) = |f(x)|$ pour $x \in [a,b]$.

Démonstration :
1. Il est facile de voir que l'ensemble des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est un e.v. sur $\mathbb{R}$. On remarque alors que $E_{a,b}$ est un s.e.v. (c'est-à-dire un sous espace vectoriel) de l'ensemble des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $f, g \in E_{a,b}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Il existe $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ t.q. $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ et t.q. f soit constante sur $]x_{i-1}, x_i[$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. De même, il existe $y_0, \ldots, y_p \in [a,b]$ t.q. $a = y_0 < \ldots < y_p = b$ et t.q. g soit constante sur $]y_{j-1}, y_j[$, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$. On introduit alors, comme dans la proposition 5.1, l'union des points x_i, $i \in \{0, \ldots, n\}$, et des points y_j, $j \in \{0, \ldots, p\}$, c'est-à-dire

$$\{z_0, \ldots, z_q\} = \{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{y_0, \ldots, y_p\}, \text{ avec } a = z_0 < \ldots < z_q = b.$$

Il est clair (comme l'ensemble des points z_k contient tous les points x_i et tous les points y_j) que les fonctions f et g sont constantes sur $]z_{k-1}, z_k[$, pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$. la fonction $\alpha f + \beta g$ est donc aussi constante sur $]z_{k-1}, z_k[$, pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$. ce qui prouve que $\alpha f + \beta g \in E_{a,b}$ et donc que $E_{a,b}$ est un e.v. sur $\mathbb{R}$. (On peut remarquer que cet espace vectoriel est de dimension infinie).

2. Pour montrer que T est une application linéaire sur $E_{a,b}$, on reprend les notations précédentes. Soit $f, g \in E_{a,b}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Comme précédemment, on remarque qu'il existe $\{z_0, \ldots, z_q\}$ t.q. $a = z_0 < \ldots < z_q = b$ et t.q. f et g soient constantes sur $]z_{k-1}, z_k[$, pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$. On note alors α_k la valeur de f sur $]z_{k-1}, z_k[$et β_k la valeur de g sur $]z_{k-1}, z_k[$. Par définition de T (définition 5.1) on a

$$T(f) = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k (z_k - z_{k-1}), \;\; T(g) = \sum_{k=1}^{q} \beta_k (z_k - z_{k-1}).$$

La fonction $\alpha f + \beta g$ (qui appartient, comme nous l'avons déjà vu, à $E_{a,b}$) est aussi constante sur $]z_{k-1}, z_k[$ (pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$) et sa valeur sur $]z_{k-1}, z_k[$ est $\alpha\alpha_k + \beta\beta_k$. On a donc (toujours par la définition 5.1)

$$T(\alpha f + \beta g) = \sum_{k=1}^{q} (\alpha\alpha_k + \beta\beta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

On en déduit

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha \sum_{k=1}^{q} \alpha_k (z_k - z_{k-1}) + \beta \sum_{k=1}^{q} \beta_k (z_k - z_{k-1}) = \alpha T(f) + \beta T(g).$$

Ce qui prouve bien la linéarité de T.

3. On reprend, encore une fois, les mêmes notations. Soit $f, g \in E_{a,b}$. Il existe $\{z_0, \ldots, z_q\}$ t.q. $a = z_0 < \ldots < z_q = b$ et t.q. f et g soient constantes sur $]z_{k-1}, z_k[$, pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$. On note alors α_k la valeur de f sur $]z_{k-1}, z_k[$et β_k la valeur de g sur $]z_{k-1}, z_k[$. On a donc

$$T(f) = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k (z_k - z_{k-1}), \;\; T(g) = \sum_{k=1}^{q} \beta_k (z_k - z_{k-1}).$$

Si $f \geq g$, on a nécessairement $\alpha_k \geq \beta_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$ (il suffit de remarquer que $\alpha_k = f(x) \geq g(x) = \beta_k$ pour $x \in]z_{k-1}, z_k[$). On en déduit que

$$T(f) = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k (z_k - z_{k-1}) \geq \sum_{k=1}^{q} \beta_k (z_k - z_{k-1}) = T(g).$$

4. Soit $f \in E_{a,b}$. Il existe $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.q. $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ et $f = \alpha_i$ sur $]x_{i-1}, x_i[$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a alors $|f| = |\alpha_i|$ sur $]x_{i-1}, x_i[$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ceci prouve que $|f| \in E_{a,b}$ et (avec la définition 5.1)

$$T(|f|) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| (x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - x_{i-1}) = T(f).$$

Le même résultat avec $-f$ au lieu de f donne

$$T(|-f|) \geq T(-f).$$

. Comme $|-f| = |f|$ et (par linéarité de T) $T(-f) = -T(f)$, on a donc

$$T(|f|) \geq -T(f).$$

Finalement on a donc $T(|f|) \geq \max(T(f), -T(f)) = |T(f)|$. ■

5.3 Intégrale des fonctions continues

Exemple 5.1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On rappelle que :

$$f \text{ continue (sur } I) \not\Rightarrow f \text{ uniformément continue.}$$

Voici deux exemples d'applications continues et non uniformément continues.

1. $I =]0, 1]$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ (vu au chapitre 2).
2. $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$.

Toutefois, lorsque I est intervalle de $\mathbb{R}$, fermé et borné, le théorème 5.1 montre que f est continue si et seulement si f est uniformément continue.

Théorème 5.1 (Heine) *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors, f est uniformément continue.*

Démonstration : Cette démonstration fait l'objet de l'exercice 5.2. ■

Remarque 5.2 Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application bornée de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Comme f est bornée, on peut trouver g et h dans $E_{a,b}$ t.q. $g \le f \le h$. Soit $g, h \in E_{a,b}$ t.q. $g \le f \le h$. On a alors (d'après la proposition 5.2) $\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b h(x)dx$. Cette remarque suggère la définition de l'intégrale "supérieure" (notée S_f) et de l'intégrale "inférieure" (notée I_f) de f.

Définition 5.3 (Intégrales supérieure et inférieure) *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application bornée de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose $I_f = \sup\{\int_a^b g(x)dx, g \in E_{a,b},\ g \le f\}$, $S_f = \inf\{\int_a^b h(x)dx, h \in E_{a,b}, f \le h\}$.*

Remarque 5.3 Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application bornée de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. La remarque 5.2 (avec les notations de la définition 5.3) donne $I_f \le S_f$. Mail il est possible que $I_f \ne S_f$. Par contre, si $f \in E_{a,b}$, il est facile de montrer que $I_f = S_f = \int_a^b f(x)dx$.

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. La fonction f est donc bornée (voir le théorème 2.3). Nous avons vu dans la remarque 5.3 que $I_f \le S_f$ (ces quantités sont définies dans la définition 5.3). Dans la proposition 5.4 nous allons montrer que $I_f = S_f$. Ceci nous permettra alors de définir l'intégrale de f sur $[a, b]$ comme la valeur commune de I_f et S_f (voir la définition 5.5). Pour cela, nous allons d'abord montrer qu'on peut approcher f "uniformément" par une fonction en escalier (grâce au théorème 5.1).

Définition 5.4 (Convergence simple et convergence uniforme) *Soit $D \subset \mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de D dans $\mathbb{R}$ et f une application D dans $\mathbb{R}$.*

1. *On dit que f_n converge simplement vers f, quand $n \to +\infty$, si*

$$\text{pour tout } x \in D,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

2. *On dit que f_n converge uniformément vers f, quand $n \to +\infty$, si*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$$

Remarque 5.4 La convergence uniforme implique la convergence simple, mais la réciproque est fausse (même si D est un intervalle fermé borné et que les fonctions f_n et f sont continues de D dans $\mathbb{R}$). Par exemple, on prend $D = [0,1]$, $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et, pour $n \geq 2$, on définit f_n par

$$f_n(x) = nx \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n},$$
$$f_n(x) = -n(x - \frac{2}{n}) \text{ si } \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n},$$
$$f_n(x) = 0 \text{ si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1.$$

La suite $(f_n)_{n\geq 2}$ converge bien simplement vers f, mais elle ne converge par uniformément vers f car, pour tout $n \geq 2$, $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1$.

On approche maintenant une fonction continue par une fonction en escalier.

Proposition 5.3 *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On a alors*

1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in E_{a,b}$ t.q. $|f - \varphi| \leq \varepsilon$ (c'est-à-dire $\varphi(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq \varphi(x) + \varepsilon$ pour tout $x \in [a,b]$).*
2. *Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E_{a,b}$ t.q. $\varphi_n \to f$ uniformément, quand $n \to +\infty$.*

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue (d'après le théorème 5.1), il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x, y \in [a,b],\ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \tag{5.2}$$

On choisit alors $n \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\frac{1}{n} \leq \frac{\alpha}{b-a}$ et pour $i \in \{0,\ldots,n\}$ on pose $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$, de sorte que $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ et $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \leq \alpha$. On définit alors φ de la manière suivante :

$$\varphi(x) = f(x_{i-1}) \text{ si } x \in I_i,\ i \in \{1,\ldots,n\},$$

avec $I_i = [x_{i-1}, x_i[$ si $i \in \{1,\ldots,n\}$ et $I_n = [x_{n-1}, x_n]$. Avec cette définition de φ, on a bien $\varphi \in E_{a,b}$ et on a $|f - \varphi| \leq \varepsilon$. En effet, soit $x \in E_{a,b}$, il existe $i \in \{1,\ldots,n\}$ t.q. $x \in I_i$. On a alors (grâce à (5.2))

$$|\varphi(x) - f(x)| = |f(x_{i-1}) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ car } |x - x_{i-1}| \leq x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \leq \alpha.$$

On a donc bien trouvé $\varphi \in E_{a,b}$ t.q. $|\varphi - f| \leq \varepsilon$.
Pour montrer le deuxième item, il suffit de prendre, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\varphi_n \in E_{a,b}$ t.q. $|\varphi_n - f| \leq \frac{1}{n}$. On a alors $\sup_{x\in[a,b]} |\varphi_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$. La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge donc uniformément vers f. ∎

Proposition 5.4 *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors $I_f = S_f$.*

Démonstration : Comme cela a été dit dans la remarque 5.3 on a $I_f \leq S_f$ (cela est même vrai pour toute fonction bornée de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et donc, *a fortiori* pour toute fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$). Grâce à la proposition 5.3, on va montrer maintenant que $I_f = S_f$.
D'après la proposition 5.3, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E_{a,b}$ t.q. $\varphi_n \to f$ uniformément vers f, quand $n \to +\infty$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_n - \varepsilon_n \leq f \leq \varphi_n + \varepsilon_n,$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et $\varepsilon_n = \sup_{x\in[a,b]} |\varphi_n(x) - f(x)|$. En posant $g_n = f_n - \varepsilon_n$ et $h_n = f_n + \varepsilon_n$, on a donc $g_n, h_n \in E_{a,b}$ et $g_n \leq f \leq h_n$. La définition de I_f et S_f (définition 5.3) et le fait que $I_f \leq S_f$ donne alors

$$\int_a^b g_n(x)dx \leq I_f \leq S_f \leq \int_a^b h_n(x)dx.$$

Grâce à la linéarité de l'intégrale sur $E_{a,b}$, on a donc

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx - \varepsilon_n(b-a) \leq I_f \leq S_f \leq \int_a^b \varphi_n(x)dx + \varepsilon_n(b-a). \tag{5.3}$$

On en déduit, en particulier, que $0 \leq S_f - I_f \leq 2\varepsilon_n(b-a)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, on a donc $I_f = S_f$. ■

Définition 5.5 (Intégrale des fonctions continues) *Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose $\int_a^b f(x)dx = I_f = S_f$ (les quantités I_f et S_f sont définies dans la définition 5.3).*

Remarque 5.5 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On sait maintenant que $\int_a^b f(x)dx = I_f = S_f$. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E_{a,b}$ t.q. $\varphi_n \to f$ uniformément vers f, quand $n \to +\infty$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_n - \varepsilon_n \leq f \leq \varphi_n + \varepsilon_n,$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et $\varepsilon_n = \sup_{x\in[a,b]} |\varphi_n(x) - f(x)|$. Comme cela a été vu dans la proposition 5.4, on a

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx - \varepsilon_n(b-a) \leq I_f \leq S_f \leq \int_a^b \varphi_n(x)dx + \varepsilon_n(b-a).$$

Mail, comme $\int_a^b f(x)dx = I_f = S_f$, on en déduit

$$|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi_n(x)dx| \leq \varepsilon_n(b-a).$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. Nous utiliserons ceci pour démontrer (simplement) la linéarité de l'intégrale sur l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ (proposition 5.5).

Soit $-\infty < a < b < \infty$, on rappelle que $E_{a,b} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ f \text{ en escalier}\}$ et on note $C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ f \text{ continue}\}$. L'intégrale est donc définie sur $C([a,b])$ (et sur $E_{a,b}$). Voici quelques propriétés simples de l'intégrale sur $C([a,b])$ déduites de celles sur $E_{a,b}$ (proposition 5.2).

Proposition 5.5 (Propriétés de l'intégrale des fonctions continues) *Soit $-\infty < a < b < \infty$. On note I l'application de $C([a,b])$ dans $\mathbb{R}$ définie par $I(f) = \int_a^b f(x)dx$. Alors :*

1. *$C([a,b])$ est un e.v. sur $\mathbb{R}$,*
2. *(linéarité) I est une application linéaire de $C([a,b])$ dans $\mathbb{R}$,*

3. *(monotonie)* $f, g \in C([a,b])$, $f \geq g \;\Rightarrow\; I(f) \geq I(g)$,

4. $f \in C([a,b]) \;\Rightarrow\; |f| \in C([a,b])$ *et* $|I(f)| \leq I(|f|)$.

Démonstration :
1. Le fait que $C([a,b])$ est un e.v. sur $\mathbb{R}$ est facile à voir. En effet, si f et g sont continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est aussi continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $f, g \in C([a,b])$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Il existe deux suites $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E_{a,b}$ t.q. $\varphi_n \to f$ uniformément et $\psi_n \to g$ uniformément, quand $n \to +\infty$. Pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$|(\alpha\varphi_n + \beta\psi_n)(x) - (\alpha f + \beta g)(x)| \leq |\alpha||\varphi_n(x) - f(x)| + |\beta||\psi_n(x) - g(x)|,$$

et donc

$$\sup_{x\in[a,b]} \{|(\alpha\varphi_n + \beta\psi_n)(x) - (\alpha f + \beta g)(x)|\} \leq |\alpha| \sup_{x\in[a,b]} \{|\varphi_n(x) - f(x)|\} + |\beta| \sup_{x\in[a,b]} \{|\psi_n(x) - g(x)|\}.$$

On en déduit que $(\alpha\varphi_n + \beta\psi_n) \to (\alpha f + \beta g)$ uniformément, quand $n \to +\infty$. D'après la remarque 5.5 on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \; \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\alpha\varphi_n + \beta\psi_n)(x)dx = \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx.$$

Or, la linéarité de l'intégrale sur $E_{a,b}$ (proposition 5.2) donne

$$\int_a^b (\alpha\varphi_n + \beta\psi_n)(x)dx = \alpha \int_a^b \varphi_n(x)dx + \beta \int_a^b \psi_n(x)dx,$$

en passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient donc

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Ce qui prouve bien la linéarité de l'intégrale sur $C([a,b])$.
3. Soit $f, g \in C([a,b])$, avec $g \leq f$. On remarque simplement ici que

$$\{\varphi \in E_{a,b}, \varphi \leq g\} \subset \{\varphi \in E_{a,b}, \varphi \leq f\}.$$

On en déduit $I_g \leq I_f$ et donc

$$\int_a^b g(x)dx = I_g \leq I_f = \int_a^b f(x)dx.$$

4. Soit $f \in C([a,b])$. On a, bien sûr $|f| \in C([a,b])$. Comme $f \leq |f|$, l'item précédent donne

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Mais, on a aussi $-f \leq |f|$, les deux items précédents donnent alors

$$-\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (-f)(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Finalement, comme $|\int_a^b f(x)dx| = \max\{\int_a^b f(x)dx, -\int_a^b f(x)dx\}$, on a bien

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Ce qui termine la démonstration de la proposition 5.5. ■

Remarque 5.6 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On a défini l'intégrale des fonctions continues (et l'intégrale des fonctions en escalier) sur l'intervalle $[a, b]$. On a aussi montré que l'application $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ était linéaire sur $E_{a,b}$ (proposition 5.2) et linéaire sur $C([a, b])$ (proposition 5.5). On donne maintenant deux généralisations possibles (mais peu intéressantes).

1. On note $S_{a,b}$ l'ensemble des fonctions réglées, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions qui sont limite uniforme de fonctions en escalier. L'ensemble $S_{a,b}$ contient donc $E_{a,b}$ et $C([a, b])$. En reprenant la proposition 5.3, il est facile de voir que $I_f = S_f$ si $f \in S_{a,b}$ (dans la proposition 5.3, on a seulement utilisé le fait qu'une fonction continue était limite uniforme de fonctions en escalier). Si $f \in S_{a,b}$, on pose $\int_a^b f(x)dx = I_f = S_f$. De même, une adaptation simple de la proposition 5.5 montre que $S_{a,b}$ est un e.v. sur $\mathbb{R}$ et que l'application $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est linéaire sur $S_{a,b}$.
2. Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est intégrable au sens de Riemann si f est bornée et $I_f = S_f$ (voir la définition 5.3). On note $R_{a,b}$ l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann sur l'intervalle $[a, b]$. L'ensemble $R_{a,b}$ contient donc $S_{a,b}$. Si $f \in R_{a,b}$, on pose $\int_a^b f(x)dx = I_f = S_f$. On peut montrer que $R_{a,b}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que l'application $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est linéaire sur $R_{a,b}$ (voir l'exercice 5.9). Cette démonstration est différente de celle de la proposition 5.5 car une fonction appartenant à $R_{a,b}$ n'est pas forcément limite uniforme de fonctions en escalier.
3. Les deux généralisations précédentes (l'intégrale sur $S_{a,b}$ et sur $R_{a,b}$) sont peu intéressantes. Une généralisation très intéressante (mais qui utilise des outils différents) est l'intégrale de Lebesgue. Elle contient l'intégrale de Riemann, c'est-à-dire l'intégrale sur $R_{a,b}$, et donc aussi l'intégrale des fonctions réglées et l'intégrale des fonctions continues.

Remarque 5.7 Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $f \in C([a, b])$, on pose $m = \inf\{f(x),\ x \in [a, b]\}$ et $M = \sup\{f(x),\ x \in [a, b]\}$. Une conséquence du troisième item de la proposition 5.5 est alors que $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$.

Proposition 5.6 (Formule de Chasles) *Soit $-\infty < a < b < \infty$, $f \in C([a, b])$ et $a < c < b$. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Démonstration : Soit $\varphi \in E_{a,b}$. On définit ξ et ζ par

$$\xi(x) = \varphi(x) \text{ pour } x \in [a, c],\ \ \zeta(x) = \varphi(x) \text{ pour } x \in [c, b].$$

Il est facile de voir que $\xi \in E_{a,c}$, $\zeta \in E_{c,b}$ et (avec la définition 5.2) que

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^c \xi(x)dx + \int_c^b \zeta(x)dx. \tag{5.4}$$

Comme $f \in C([a,b])$, il existe une suite φ_n dans $E_{a,b}$ t.q. $\varphi_n \to f$ uniformément sur $[a,b]$. On définit alors les suites $(\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E_{a,c}$ et $E_{c,b}$ par

$$\xi_n(x) = \varphi_n(x) \text{ pour } x \in [a,c], \quad \zeta_n(x) = \varphi_n(x) \text{ pour } x \in [c,b].$$

La suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,c]$ et la suite $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[c,b]$. La remarque 5.5 donne donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^c \xi_n(x)dx = \int_a^c f(x)dx, \ \lim_{n\to+\infty} \int_c^b \zeta_n(x)dx = \int_c^b f(x)dx, \ \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Comme $\displaystyle\int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^c \xi_n(x)dx + \int_c^b \zeta_n(x)dx$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$, voir (5.4)), on obtient quand $n \to +\infty$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. ■

5.4 Primitives

Définition 5.6 (Intégrale toutes bornes) *Soit $-\infty < b \le a < \infty$ et $f \in C([b,a])$, On pose :*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \ \textit{si}\ b < a \ \textit{et} \ \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Une conséquence facile de la définition 5.6 et de la proposition 5.6 est que si $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$, f est une application continue de $]\alpha,\beta[$ dans $\mathbb{R}$ et $a,b,c \in]\alpha,\beta[$, on a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

On montre maintenant l'existence (et l'unicité à une constante près) d'une primitive à une fonction continue.

Théorème 5.2 (Primitive d'une fonction continue) *Soit $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$ et f continue de $]\alpha,\beta[$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in]\alpha,\beta[$.*
On pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ pour $x \in]\alpha,\beta[$. Alors :

1. *La fonction F dérivable (sur $]\alpha,\beta[$) et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]\alpha,\beta[$. La fonction F est donc une primitive de f.*
2. *Soit G une primitive de f. Il existe alors $C \in \mathbb{R}$ t.q. $F - G = C$ (c'est-à-dire $F(x) - G(x) = C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). La fonction F est donc la seule primitive de f s'annulant en a.*

Démonstration : Soit $x \in]\alpha,\beta[$. On va montrer que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x). \tag{5.5}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x, il existe $\eta > 0$ t.q.

$$y \in [x-\eta, x+\eta] \Rightarrow |f(y) - f(x)| \le \varepsilon. \tag{5.6}$$

Soit maintenant $0 < h \le \eta$. On a

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt \ \text{ et } \ f(x) = \frac{f(x)}{h}\int_x^{x+h} dt = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dt.$$

On a donc

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| = \frac{1}{h}\left|\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))dt\right|.$$

On utilise maintenant la proposition 5.5 et (5.6) (car $|h| \le \eta$). On obtient

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\varepsilon dt = \varepsilon.$$

Un raisonnement analogue avec $-\eta \le h < 0$ donne

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \le \frac{1}{-h}\int_{x+h}^{x}|f(t)-f(x)|dt \le \frac{1}{-h}\int_{x+h}^{x}\varepsilon dt = \varepsilon.$$

Finalement, on a donc

$$h \ne 0,\ |h| \le \eta \Rightarrow \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \le \varepsilon.$$

Ceci prouve bien (5.5) et termine le 1er item du théorème 5.2, c'est-à-dire F est dérivable et $F' = f$.

Pour montrer le deuxième item, soit G une primitive de f. On a donc, pour tout $y \in]\alpha, \beta[$, $F'(y) = G'(y) = f(y)$. Soit $x \in]\alpha, \beta[$, $x \ne a$. En appliquant le théorème des accroissements finis (théorème 3.2) à la fonction $G - F$ sur l'intervalle dont les bornes sont a et x, il existe y entre a et x t.q.

$$(G(x) - F(x)) - (G(a) - F(a)) = (x-a)(G'(y) - F'(y)) = 0.$$

La fonction $G - F$ est donc constante (et égale à $G(a) - F(a)$, c'est-à-dire à $G(a)$).

Bien sûr, on en déduit que F est la seule primitive de f s'annulant en a. ∎

Une conséquence du théorème 5.2 est que l'on peut calculer des intégrales en recherchant des primitives. Plus précisément, soit $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$ et f une fonction continue de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a, b \in]\alpha, \beta[$. Pour calculer $\int_a^b f(t)dt$, on recherche une primitive de f, notée F. On a alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Par exemple, Pour calculer de $\int_0^1 t^2 dt$, on cherche une primitive de $x \mapsto x^2$. Une primitive est l'application $x \mapsto \frac{x^3}{3}$ et on obtient ainsi $\int_0^1 t^2 = \frac{1}{3}$.

Remarque 5.8 Soit $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$ et f de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1. On a alors, pour tout $a, b \in]\alpha, \beta[$, $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$. En effet, pour $x \in]\alpha, \beta[$, on pose

$$F(x) = \int_a^x f'(t)dt \ \text{ et } \ G(x) = f(x) - f(a).$$

Les fonctions F et G sont donc deux primitives, s'annulant en a, de la fonction continue f'. Le théorème 5.2 donne donc que $F = G$, c'est-à-dire $F(b) = G(b)$ pour tout $b \in]\alpha, \beta[$.

Voici un exemple d'application de cette égalité, en utilisant la monotonie de l'intégrale. Si $b > a$, on déduit de l'égalité précédente :

$$m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a),$$

avec $m = \min\{f'(x), x \in [a,b]\}$ et $M = \max\{f'(x), x \in [a,b]\}$. (Ceci a déjà été montré précédemment, mais d'une manière différente, en utilisant directement le théorème des accroissements finis, théorème 3.2.)

5.5 Intégration par parties, formule de Taylor

Proposition 5.7 (intégration par parties) *Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ et f, g deux applications continues de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1. On a alors, pour tout $a, b \in]\alpha, \beta[$, $a < b$:*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = -\int_a^b f(x)g'(x)dx + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

DÉMONSTRATION : la fonction fg est aussi de classe C^1 sur $]\alpha, \beta[$. La remarque 5.8 donne donc, comme $(fg)' = f'g + fg'$,

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b (fg)'(t)dt = \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx.$$

La linéarité de l'intégrale (proposition 5.5) donne alors

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = -\int_a^b f(x)g'(x)dx + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

On donne maintenant la formule de Taylor avec reste intégral, plus précise que les formules de Taylor-Young et Taylor-Lagrange.

Proposition 5.8 (Taylor, reste intégral) *Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ et f une application de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a, b \in]\alpha, \beta[$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que f est de classe C^n. On a alors :*

1. *Si $n = 1$, $f(b) = f(a) + (b-a)\int_0^1 f'(tb + (1-t)a)dt$.*
2. *Si $n = 2$, $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2 \int_0^1 (1-t)f''(tb + (1-t)a)dt$.*
3. *Si $n > 2$, $f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (b-a)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(tb + (1-t)a)dt$.*

DÉMONSTRATION : On commence par montrer la proposition si $a = 0$, $b = 1$ (et donc $\alpha < 0$ et $\beta > 1$).

Soit φ une fonction de classe C^1 sur $]\alpha, \beta[$ (l'intervalle $]\alpha, \beta[$ est donc simplement un intervalle ouvert contenant l'intervalle fermé $[0, 1]$). La remarque 5.8 donne

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt.$$

Ceci donne l'item 1 de la proposition 5.8.

On suppose maintenant que φ est de classe C^2. On utilise la proposition 5.7 avec $f(x) = x - 1$ et $g(x) = \varphi'(x)$. On obtient

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt = -\int_0^1 (x-1)\varphi''(x)dx + f(1)\varphi'(1) - f(0)\varphi'(0) = \int_0^1 (1-x)\varphi''(x)dx + \varphi'(0).$$

Ceci montre le deuxième item de la proposition 5.8. On montre ensuite le troisième item de la proposition 5.8 en faisant une récurrence et en utilisant la proposition 5.7 (on passe de n à $n+1$ en prenant, dans la proposition 5.7, $f(x) = -\frac{1}{n}(1-x)^n$ et $g(x) = \varphi^{(n)}$). Ceci est laissé en exercice.

Pour montrer le cas général de la proposition 5.8, on se ramène au cas $a = 0$ et $b = 1$ en posant

$$\varphi(t) = f(tb + (1-t)a).$$

La fonction φ est bien définie sur un intervalle ouvert contenant $[0, 1]$. Elle a la même régularité que φ (c'est-à-dire que φ est de classe C^n si f est de classe C^n) et on obtient les dérivées de φ à partir de celle de f. Plus précisèment, on a, pour $t \in [0, 1]$, $\varphi'(t) = (b - a)f'(tb + (1 - t)a)$ et donc, par récurrence sur n, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi^{(n)}(t) = (b-a)^n f^{(n)}(tb + (1-t)a).$$

On trouve alors facilement la formule de taylor de f à partir de celle pour φ. ■

5.6 Théorème de convergence

Question : Soit $-\infty < a < b < \infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C([a, b])$ et $f \in C([a, b])$.
On suppose que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ (on dit que f_n converge simplement vers f.)
A-t-on $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$? (i.e. peut-on intervertir lim et $\int$)
Réponse : En général, la réponse est non ! mais la réponse est "oui" si la convergence de f_n vers f est uniforme, comme le montre le théorème 5.3.

Théorème 5.3 (Convergence uniforme donne convergence en moyenne) *Soit $-\infty < a < b < \infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C([a, b])$ et $f \in C([a, b])$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. Alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

On a même

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx = 0.$$

Démonstration : On pose

$$\varepsilon_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|.$$

(On peut noter d'ailleurs que ce "sup" est atteint, c'est-à-dire qu'il existe $x_n \in [a, b]$ t.q. $|f_n(x_n)-f(x_n)| = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$.)
La convergence uniforme de f_n vers f donne $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Par monotonie de l'intégrale, on a donc

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \le (b - a)\varepsilon_n,$$

on en déduit bien

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx = 0.$$

Puis, les items 2 et 4 de la proposition 5.5 donne

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))dx \right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \le (b - a)\varepsilon_n.$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. ■

Remarque 5.9 Soit $-\infty < a < b < \infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C([a,b])$ et $f \in C([a,b])$. Nous avons maintenant 3 définitions différentes de convergence :

1. Convergence simple,
2. convergence uniforme,
3. convergence en moyenne (c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx = 0$).

On a : 2) $\Rightarrow$ 1), 2) $\Rightarrow$ 3) (théorème 5.3) mais, on peut montrer : 1) $\not\Rightarrow$ 2), 1) $\not\Rightarrow$ 3), 3) $\not\Rightarrow$ 1), 3) $\not\Rightarrow$ 2).

5.7 Exercices

Exercice 5.1 (Bolzano-Weierstrass)

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $[a,b]$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $a_n = \inf\{x_p,\ p \geq n\}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite croissante majorée. En déduire qu'il existe $x \in [a,b]$ t.q. $a_n \to x$ quand $n \to +\infty$.
2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $\varphi(n) \geq n$ t.q. $|x_{\varphi(n)} - a_n| \leq \frac{1}{n}$ (où a_n est défini à la question précédente). En déduire que $x_{\varphi(n)} \to x$ quand $n \to +\infty$ (où x est défini à la question précédente).

Exercice 5.2 (Théorème de Heine)

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f n'est pas uniformément continue.
   (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $x_n, y_n \in [a,b]$ t.q. $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
   (b) Montrer qu'il existe un point $x \in [a,b]$ t.q. f ne soit pas continue en x. [Utiliser l'exercice 5.1.]
2. On suppose que f est continue (sur $[a,b]$). Montrer que f est uniformément continue (sur $[a,b]$).

Exercice 5.3 (Calcul de primitives)

1. Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^4 + 3x^2 - x$. Calculer F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $F' = f$ et $F(0) = 0$.
2. Soit f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$. Calculer F de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $F' = f$ et $F(0) = 0$.
3. Soit f de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^4+x^2-1}{x^2}$. Calculer F de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $F' = f$ et $F(1) = 0$.

Exercice 5.4 (Formule de la moyenne)

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathrm{Im}(f) = \{f(x), x \in [a,b]\}$, $m = \inf(\mathrm{Im}(f))$ et $M = \sup(\mathrm{Im}(f))$.

1. Montrer qu'il existe $\mu \in [m,M]$ t.q. :

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

2. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ t.q. :

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Exercice 5.5 (Intégrale d'une fonction positive)

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, et qu'il existe $c \in [a, b]$ t.q. $f(c) > 0$. Montrer que $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Exercice 5.6 (Intégrale impropre)

On définit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} &f(x) = 0, \text{ si } x \leq 0, \\ &f(x) = x^2 \sin \tfrac{1}{x^2}, \text{ si } x > 0. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f' est continue en tout point sauf 0.
3. Soit $0 < a < b < \infty$. Montrer que :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

4. Soit $a > 0$. Pour $0 < x < a$, on pose, $g(x) = \int_x^a f'(t)dt$. Montrer que $g(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to 0$, avec $x > 0$. On note (improprement... car f' n'est pas continue sur $[0, a]$) $\int_0^a f'(t)dt$ cette limite. Montrer que :

$$f(a) - f(0) = \int_0^a f'(t)dt.$$

Exercice 5.7 (Calcul d'intégrales)

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^3 x^3 dx, \qquad \int_1^4 \frac{x^2-1}{x^2} dx, \qquad \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx.$$

Exercice 5.8 (Convergence de l'intégrale)

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et φ une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\varphi_n \to \varphi$ simplement quand $n \to \infty$ (c'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, pour tout $x \in [0, 1]$).

1. Montrer que si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx = 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.
2. Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.

3. Donner un exemple pour lequel $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers φ et :
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$$
4. Donner un exemple pour lequel $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$
5. Si la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les deux conditions :
   (a) Pour tout ε, $0<\varepsilon<1$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur $[\varepsilon,1]$,
   (b) Les φ_n sont à valeurs dans $[-1,+1]$,

   montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$

Exercice 5.9 (Linéarité de l'intégrale de Riemann)

Soit $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. On rappelle que $R_{a,b}$ désigne l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$ (remarque 5.6). Montrer que $R_{a,b}$ est un e.v. sur $\mathbb{R}$ et que l'application $f\mapsto\int_a^b f(x)dx$ est linéaire sur $R_{a,b}$.

Exercice 5.10 (Changement de variable)

Soient $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ une fonction strictement croissante, de classe C^1, vérifiant $\varphi(\alpha)=a$ et $\varphi(\beta)=b$.

1. Montrer que φ est une bijection de $[\alpha,\beta]$ dans $[a,b]$.
2. Montrer que
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$
   [On pourra introduire $G=F\circ\varphi$, où F est une primitive de f sur $[a,b]$, et calculer G'.]
   Remarque. L'égalité ci-dessus est appelée la formule du changement de variable. On dit qu'on calcule l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ en faisant le changement de variable $x=\varphi(t)$.
3. Calculer les intégrales suivantes :
   (a) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$. [On pourra considérer le chagement de variable $x=\sin t$.]
   (b) $\int_1^2 e^x\sin(e^x)\,dx$. [On pourra considérer le changement de variable $x=\ln t$.]

Exercice 5.11 (Moyenne de $1/t$)

Soient $0<a\leq b$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b\frac{dt}{t}\leq\frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$

Exercice 5.12 (Un point fixe)

Soit $f\in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a\in]0,1[$ telle que $f(a)=a$. [On pourra s'intéresser à l'intégrale de $x-f(x)$.]

Exercice 5.13 (Suite d'intégrales de puissances)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue strictement croissante telle que $f(0) = 0,\ f(1) = 1$. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(t)dt$.

Exercice 5.14 (Intégration par parties)

Calculer les primitives des fonctions suivantes (définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) : $f(x) = e^x \cos(x)$, $g(x) = x\mathrm{Arctan}\,(x)$ et $h(x) = (x^2 + x + 1)e^x$.

Exercice 5.15 (Quelques calculs d'intégrales)

Calculer les intégrales : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2}$, $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$, $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx$ et $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6}$.

Exercice 5.16 (Intégrales et séries)

Evaluer les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. Comparer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ avec $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$. Comparer la suite croissante $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$ avec $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x^2}$. En déduire que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est finie.

Exercice 5.17 (Quelques intégrales sur $[0, +\infty[$)

Pour $t > 0$, on pose $f(t) = \frac{\sin t}{t}$. On pose aussi $f(0) = 1$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $G(x) = \int_0^x f(t)\sin t dt$, $H(x) = \int_0^x f(t)^2 dt$. Montrer que $F(x)$ et $H(x)$ ont des limites dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que $G(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 5.18 (TVI)

Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ t.q.

$$\int_0^1 x(1-x)f(x)dx = \frac{f(c)}{6}.$$

Exercice 5.19 (Un peu d'astuce...)

Soit φ de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 et soit ψ de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $s\psi'(s) = \varphi'(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+^\star$. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$, $a \neq b$. Montrer qu"il existe c entre a et b t.q.

$$(\psi(b) - \psi(a))b - (\varphi(b) - \varphi(a)) = \frac{1}{2}(b-a)^2\psi'(c).$$

5.8 Exercices corrigés

Corrigé 1 (Corrigé de l'exercice 5.11)

Soient $0 < a \leq b$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{t} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

corrigé

Pour $x \geq a$, on pose $f(x) = \int_a^x \frac{dt}{t} - \frac{x-a}{\sqrt{ax}}$. La fonction f est donc continue de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et $f(a) = 0$. On montre maintenant que $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a, \infty[$ (on en déduit que f est décroissante et donc que $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, +\infty[$, ce qui donne, en particulier, $f(b) \leq 0$).

Soit $x > a$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{ax}} + \frac{x-a}{2x\sqrt{ax}} = \frac{2\sqrt{ax} - 2x + x - a}{2x\sqrt{ax}} = \frac{2\sqrt{ax} - x - a}{2x\sqrt{ax}} = \frac{-(\sqrt{x} - \sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}} < 0.$$

Corrigé 2 (Corrigé de l'exercice 5.12)

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ telle que $f(a) = a$. [On pourra s'intéresser à l'intégrale de $x - f(x)$.]

corrigé

Pour $x \in [0,1]$, on pose $g(x) = x - f(x)$. la fonction g est continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 xdx - \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0. \tag{5.7}$$

Si $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0,1[$, on a alors (par continuité) $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et l'exercice 5.5 donne $\int_0^1 g(x)dx > 0$, en contradiction avec (5.7).

De même, si $g(x) < 0$ pour tout $x \in]0,1[$, on a $\int_0^1 g(x)dx < 0$, en contradiction aussi avec (5.7).

On en déduit qu'il existe $a \in]0,1[$ t.q. $g(a) = 0$, c'est-à-dire $f(a) = a$.

Corrigé 3 (Corrigé de l'exercice 5.13)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue strictement croissante telle que $f(0) = 0,\ f(1) = 1$. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(t)dt$.

corrigé

On va montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(t)dt = 0$. Soit $0 < \varepsilon < 1$. Comme f est strictement croissante, on a, pour tout $t \in [0, 1-\varepsilon]$,

$$0 = f(0) \leq f(t) \leq f(1-\varepsilon) < f(1) = 1 \text{ et donc } 0 \leq f^n(t) \leq f^n(1-\varepsilon) < 1,$$

et, pour tout $t \in [1-\varepsilon, 1]$, $0 \leq f(t) \leq 1$ et donc $0 \leq f^n(t)dt \leq 1$.

On en déduit que

$$0 \leq \int_0^1 f^n(t)dt \leq \int_0^{1-\varepsilon} f^n(1-\varepsilon)dt + \int_{1-\varepsilon}^1 dt \leq f^n(1-\varepsilon) + \varepsilon.$$

Comme $f(1-\varepsilon) < 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $f^{n_0}(1-\varepsilon) \leq \varepsilon$, on a donc

$$n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 f^n(t)dt \leq 2\varepsilon,$$

ce qui prouve bien que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(t)dt = 0$.

Corrigé 4 (Corrigé de l'exercice 5.14)

Calculer les primitives des fonctions suivantes (définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) : $f(x) = e^x \cos(x)$, $g(x) = x\text{Arctan}\,(x)$ et $h(x) = (x^2 + x + 1)e^x$.

corrigé

Ces trois primitives de trouvent en intégrant par parties. On calcule, par exemple, la première.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\int_0^x e^t \cos t\,dt = -\int_0^x e^t \sin t\,dt + [e^t \sin t]_0^x = -\int_0^x e^t \sin t\,dt + e^x \sin x$. On intégre maintenant une deuxième fois par parties, on obtient

$$\int_0^x e^t \cos t\,dt = -\int_0^x e^t \cos t\,dt + [e^t \cos t]_0^x + e^x \sin x = \int_0^x e^t \cos t\,dt + e^x(\sin x + \cos x) - 1.$$

Ce qui donne finalement $\displaystyle\int_0^x e^t \cos t\,dt = \frac{e^x(\sin x + \cos x) - 1}{2}$.

Corrigé 5 (Corrigé de l'exercice 5.15)

Calculer les intégrales : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2}$, $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$, $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$ et $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6}$.

corrigé

La première se calcule avec un changement de variable. On obtient

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{y^2+1}dy = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Les intégrales suivantes se calculent en utilisant une décompoosition en éléments simples. On calcule, par exemple, la troisième. Comme $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2+x-6) = (x-1)(x-2)(x+3)$, on peut montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\frac{1}{x^3-7x+6} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3} \text{ pour tout } x \notin \{1, 2, -3\}.$$

On peu trouver les valeurs de a, b, c par identification (et montrer aussi ainsi l'existence de a, b, c) mais le plus rapide est de remarquer que

$$a = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^3-7x+6} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-2)(x+3)} = -\frac{1}{4},$$
$$b = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^3-7x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{5},$$
$$c = \lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^3-7x+6} = \lim_{x\to -3} \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{20}.$$

On peut maintenant calculer l'intégrale demandée

$$I = \int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3-7x+6} = a\int_{-2}^0 \frac{1}{x-1}dx + b\int_{-2}^0 \frac{1}{x-2}dx + c\int_{-2}^0 \frac{1}{x+3}dx.$$

Puis on a

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{x-1}dx = [\ln(1-x)]_{-2}^0 = -\ln 3,$$

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x-2}dx = [\ln(2-x)]_{-2}^{0} = -\ln 2,$$
$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x+3}dx = [\ln(x+3)]_{-2}^{0} = \ln 3.$$

On en déduit que $I = \frac{\ln 3}{4} - \frac{\ln 2}{5} + \frac{\ln 3}{20} = \frac{3\ln 3 - 2\ln 2}{10}$.

Corrigé 6 (Corrigé de l'exercice 5.16)

Evaluer les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. Comparer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ avec $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$. Comparer la suite croissante $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$ avec $\displaystyle\int_1^{n} \frac{dx}{x^2}$. En déduire que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est finie.

corrigé

Soit f une fonction continue de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Si $\int_1^a f(x)dx$ a une limite (finie ou infinie) quand $a \to +\infty$, on pose (ceci est une définition, non vue en cours)

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty} \int_1^a f(x)dx.$$

Comme $\int_1^a \frac{dx}{x} = \ln a$, on a donc $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$.
Comme $\int_1^a \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{a} + 1$, on a donc $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}^\star$, Pour $x \in [k, k+1[$, on pose $g(x) = \frac{1}{k}$ (de sorte que $g(x) = 1/k \geq 1/x$ car $x \geq k$). Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction g est donc une fonction en escalier sur l'intervalle $[1, n+1]$ et comme $g(x) \geq 1/x$ pour tout x, on a

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \int_1^{n+1} g(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty.$

Soit $k \in \mathbb{N}^\star$, Pour $x \in [k, k+1[$, on pose $h(x) = \frac{1}{k+1}$ (de sorte que $h(x) = 1/(k+1) \leq 1/x$ car $x \leq k+1$). Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction h^2 est donc une fonction en escalier sur l'intervalle $[1, n]$ et comme $h^2(x) \leq 1/x^2$ pour tout x, on a

$$\int_1^{n} \frac{dx}{x^2} \geq \int_1^{n} h^2(x)dx = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty.$

Corrigé 7 (Corrigé de l'exercice 5.17)

Pour $t > 0$, on pose $f(t) = \frac{\sin t}{t}$. On pose aussi $f(0) = 1$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $G(x) = \int_0^x f(t)\sin t dt$, $H(x) = \int_0^x f(t)^2 dt$. Montrer que $F(x)$ et $H(x)$ ont des limites dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que $G(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

corrigé

On montre seulement que $\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$. Pour cela, on remarque tout d'abord que G est croissante sur $[0, +\infty[$ et donc que $\lim_{x\to+\infty} G(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Pour montrer que $\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$, il suffit de montrer que $\lim_{x\to+\infty} G(2\pi n) = +\infty$. (Bien sûr, d'autres choix de suite sont possibles.).

Soit donc $n \in \mathbb{N}^\star$. On a

$$G(2\pi n) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t} dt = \sum_{p=0}^{n-1} \int_{2\pi p}^{2\pi(p+1)} \frac{\sin^2(t)}{t} dt,$$

et donc

$$G(2\pi n) \geq \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi(p+1)} \int_{2\pi p}^{2\pi(p+1)} \sin^2(t) dt = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi(p+1)} \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt.$$

On pose $\alpha = \int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt$, on a $\alpha > 0$ (en fait, on peut montrer que $\alpha = \pi$). On a alors

$$G(2\pi n) \geq \frac{\alpha}{2\pi} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = +\infty$, ce qui est montré dans l'exercice 5.16.

Chapitre 6

Fonctions réelles de plusieurs variables

6.1 Limite, continuité

On s'intéresse dans ce chapitre aux applications de $\mathbb{R}^n$ (ou d'une partie de $\mathbb{R}^n$) dans $\mathbb{R}^p$, avec $n, p \in \mathbb{N}^\star$. On va commencer par munir $\mathbb{R}^n$ (et $\mathbb{R}^p$) d'une "norme" particulière, appelée "norme euclidienne", qui jouera le rôle de la valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Définition 6.1 (Norme euclidienne) *Soit $m \in \mathbb{N}^\star$. Pour $x \in \mathbb{R}^m$, on note $x_1, \ldots, x_m$ les composantes de x et on pose :*

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si $x, y \in \mathbb{R}^m$, en notant $x_1, \ldots, x_m$ les composantes de x et $y_1, \ldots, y_m$ les composantes de y, on définit aussi le produit scalaire de x avec y, que nous noterons $x \cdot y$ par la formule :

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i.$$

Pour $m \in \mathbb{N}^\star$, l'application $x \mapsto |x|$ est une application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes (qui font de cette application une norme) :

$$\text{(Non dégénérescence) pour tout } x \in \mathbb{R}^m,\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \tag{6.1}$$

$$\text{(homogénéité positive) pour tout } x \in \mathbb{R}^m \text{ et tout } \lambda \in \mathbb{R},\ |\lambda x| = |\lambda||x|, \tag{6.2}$$

$$\text{(inégalité trinagulaire) pour tout } x, y \in \mathbb{R}^m,\ |x + y| \le |x| + |y|. \tag{6.3}$$

Remarque 6.1 *Soit $m \in \mathbb{N}^\star$. Si $x \mapsto \|x\|$ est une application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés (6.1)-(6.3) (avec $\|x\|$, $\|\lambda x\|$, $\|x+y\|$ et $\|y\|$ au lieu de $|x|$, $|\lambda x|$, $|x+y|$ et $|y|$), on dit que cette application est une norme. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^m$, on peut montrer qu'il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ t.q. :*

$$x \in \mathbb{R}^m \ \Rightarrow\ C_1|x| \le \|x\| \le C_2|x|.$$

On dit que les normes $\|\cdot\|$ et $|\cdot|$ sont "équivalentes". Les propiétés d'une fonction f (de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$) introduites dans ce chapitre (continuité, dérivabilité, caractère $C^1 \ldots$) seraient alors les mêmes en remplaçant la norme euclidienne (sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$) par d'autres normes. (Ce résultat d'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^m$ est dû au fait que $\mathbb{R}^m$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension finie. Sur un espace vectoriel de dimension infinie, les propriétés de f telles que continuité et dérivabilité dépendraient de la norme choisie.)

Une propriété intéressante de la norme euclidienne et du produit scalaire définis dans la définition 6.1 est l'inégalité de Cauchy-Schwarz que nous donnons maintenant (et qui est d'ailleurs utile pour démontrer la propriété (6.3))

Proposition 6.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit $m \in \mathbb{N}^\star$ et $x, y \in \mathbb{R}^m$. On a alors*

$$|x \cdot y| \leq |x||y|. \tag{6.4}$$

On définit maintenant les notions de limite et de continuité pour une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ de manière similaire au cas $n = p = 1$.

Définition 6.2 (Boule ouverte) *Soit $m \in \mathbb{N}^\star$, $a \in \mathbb{R}^m$ et $\delta > 0$. La boule ouverte de centre a et de rayon δ est l'ensemble $B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^m,\ |x - a| < \delta\}$.*

Définition 6.3 (Limite en un point de $\mathbb{R}$) *Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$, f une application de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et $l \in \mathbb{R}^p$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ t.q. $D \supset B(a, \delta) \setminus \{a\}$. On dit que $l = \lim_{x \to a} f(x)$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ t.q. :*

$$x \in D,\ x \neq a,\ |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Comme dans le cas $n = p = 1$, la limite de f en a (sous les hypothèses de la définition 6.3), si elle existe, est unique. Il y a aussi une caractérisation séquentielle de la limite.

Proposition 6.2 (Caractérisation séquentielle de la limite) *Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$, f une application de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et $l \in \mathbb{R}^p$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ t.q. $D \supset B(a, \delta) \setminus \{a\}$. Alors, l est la limite en a de f si et seulement f transforme toute suite convergente vers a en suite convergente vers l, c'est-à-dire :*

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\},\ \lim_{n \to +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l.$$

Définition 6.4 (Continuité) *Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$, f une application de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in D$. La fonction f est continue en a (ou continue au point a) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ t.q. :*

$$x \in D,\ |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Exemple 6.1 (Application linéaire) *Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$ et f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Alors, f est continue. En fait, f est même lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ t.q. $|f(x)| \leq k|x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*

6.2 Différentielle, dérivées partielles

Nous définissons d'abord les dérivées partielles d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, puis la différentielle.

Définition 6.5 (Parties ouvertes et parties fermées de $\mathbb{R}^n$) *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.*

1. *On dit que Ω est un ouvert si pour tout $a \in \Omega$ il existe $\alpha > 0$ t.q. $B(a, \alpha) \subset \Omega$.*
2. *On dit que Ω est un fermé si son complémentaire est un ouvert.*

Remarque 6.2 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) et a un point de Ω. D'après la définition 6.5, Il existe $\alpha > 0$ t.q. $B(a, \alpha) \subset \Omega$. Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$. Si $x \in \mathbb{R}^n$ est t.q. $x_k = a_k$ pour $k \neq j$ et $|x_j - a_j| < \alpha$, on a donc $|x - a| < \alpha$ et donc $x \in \Omega$. Ceci va nous permettre de d'introduire la notion de "dérivées partielles" d'une application f de Ω dans $\mathbb{R}^p$ ($p \geq 1$), consistant à fixer $(n-1)$ composantes de x et à considérer les applications qui à la composante restante de x associe l'une des composantes de f (on est ainsi ramené à étudier une application définie sur une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Définition 6.6 *Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}^p$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x_1, \ldots, x_n$ les composantes de x et $f_1(x), \ldots, f_p(x)$ les composantes de $f(x)$ (de sorte que les f_i sont des applications de Ω dans $\mathbb{R}$).*
Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $a \in \Omega$. On note g l'application que à x_j associe $f_i(x)$, avec $x_k = a_k$ si $k \in \{1, \ldots, n\}$, $k \neq j$ (de sorte que g est une application définie sur un voisinage de a_j, dans $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, voir la remarque 6.2). Si g est dérivable au point a_j, on dit que f admet une dérivée partielle en a selon x_j et on pose :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = g'(a_j).$$

Nous donnons maintenant la définition de différentielle et nous faisons ensuite le lien entre différentielle et dérivées partielles.

Définition 6.7 (Différentielle) *Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in \Omega$. On dit que f est différentiable en a si il existe une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, notée $df(a)$, t.q.*

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + |h| g(h), \text{ pour } h \neq 0 \text{ t.q. } a + h \in \Omega,$$

avec $\lim_{h \to 0} g(h) = 0$ (et donc g continue en 0 si on pose $g(0) = 0$). L'application linéaire $df(a)$ est alors unique (voir la proposition 6.3) ; on l'appelle différentielle de f en a.

Remarque 6.3 On s'intéresse ici au cas particulier $p = 1$ et (pour simplifier) $n = 2$. Soit T une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On définit alors $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} a_1 &= T(h) \text{ si } h \text{ est le vecteur de composantes 1 et 0,} \\ a_2 &= T(h) \text{ si } h \text{ est le vecteur de composantes 0 et 1.} \end{aligned}$$

Avec ce choix de a_1 et a_2, on a, par linéarité de T,

$$T(h) = a_1 h_1 + a_2 h_2 \text{ si } h \text{ est le vecteur de composantes } h_1 \text{ et } h_2.$$

On note maintenant dx_1 l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $dx_1(h) = h_1$ si h a pour composantes h_1 et h_2. De même, on note dx_2 l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $dx_2(h) = h_2$ si h a pour composantes h_1 et h_2. On a alors $T(h) = a_1 dx_1(h) + a_2 dx_2(h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire :

$$T = a_1 dx_1 + a_2 dx_2.$$

Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une application de Ω dans $\mathbb{R}^p$ et $a \in \Omega$. Le fait que f admette des dérivées partielles en a n'implique pas que f soit différentiable en a (ni même que f soit continue en a, voir l'exercice 6.3). Par contre si f est différentiable en a, f admet alors des dérivées partielles en a, ceci est énoncé dans la proposition 6.3.

Proposition 6.3 (différentielle et dérivées partielles) *Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in \Omega$. On suppose que f est différentiable en a. Alors, f admet des dérivées partielles en a et, pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, la i-ème composante de $df(a)(h)$, notée $(df(a)(h))_i$ vérifie :*

$$(df(a)(h))_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) h_j, \ \textit{pour tout } h \in \mathbb{R}^n.$$

(En particulier, ceci montre l'unicité de la différentielle.)

Une réciproque partielle de la proposition 6.3 sera donnée dans la proposition 6.6.

Remarque 6.4 Sous les hypothèses de la proposition 6.3, dans le cas particulier $n = 2$ et $p = 1$ (dans ce cas, f n'a qu'une composante, notée f et non f_1), la remarque 6.3 donne

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) dx_2.$$

Si f est différentiable en tout point de Ω, on définit donc une application $a \mapsto df(a)$, notée df et appelée "différentielle de f", de Ω dans l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (cet ensemble est noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$) et on a

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2. \tag{6.5}$$

On peut aussi remarquer que, pour $i = 1, 2$, l'application constant $a \mapsto dx_i$ (de Ω dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$) est la différentielle de l'application "projection sur le i-eme coordonnée", que nous noterons P_i, c'est-à-dire

$$P_1(a) = a_1, \ P_2(a) = a_2 \text{ si } a = (a_1, a_2)^t \in \Omega.$$

Avec cette notation, légalité (6.5) devient

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dP_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dP_2. \tag{6.6}$$

En fait, la notation dP_i peut sembler plus cohérente que la notation dx_i car P_i est une fonction, comme f, alors que x_i est une variable (on confond donc la variable x_i avec la fonction P_i). Cette confusion est fréquente en thermodynamique. Par exemple, avec des notations courantes en thermodynamique, si l'energie interne, notée e, est considérée comme une fonction de la densité ρ et de l'entropie S (ρ et S sont alors considérées comme des variables alors que e est considérée comme une fonction), on écrira

$$de = \frac{\partial e}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial S} dS.$$

Dans cette égalité, prise au sens de (6.5), ρ est une variable et, prise au sens de (6.6), ρ est la fonction $(a_1, a_2) \mapsto a_1$ (c'est-à-dire la projection sur la première coordonnée) que l'on peut noter, de manière un peu incorrecte, $(\rho, S) \mapsto \rho$.

En fait, une difficulté de la thermodynamique (pour un mathématicien) est que la même quantité thermodynamique, ρ par exemple, est parfois considérée comme une variable, parfois considérée comme une fonction d'une variable spatiale ou temporelle, et enfin parfois considérée comme une fonction d'une autre quantité thermodynamique… On peut ainsi voir des formules du type $\frac{d\rho}{dz} = \frac{d\rho}{dp}\frac{dp}{dz}$ qui est la formule habituelle de dérivation d'une fonction composée si on considère dans le membre de gauche que ρ est une fonction de la variable spatiale z et dans le membre de droite que ρ est une fonction de la variable p et p est une fonction de la variable spatiale z . Une formulation plus rigoureuse sur le plan mathématique serait de considérer p et ρ comme des fonctions de la variable spatiale z. Puis, de remarquer qu'il a une relation entre p et ρ c'est-à-dire qu'il existe une fonction (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par exemple) notée φ t.q. $\rho(z) = \varphi(p(z))$ pour tout z. Si les fonctions ρ, p, φ sont dérivables, on a alors, par dérivation de fonctions composées, $\rho'(z) = \varphi'(p(z))p'(z)$.

D'autres notations sont utilisées pour exprimer la différentielle au point a d'une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$:

- La matrice jacobienne. C'est une matrice de p lignes et n colonnes. Elle sera notée $M_f(a)$.
- Le gradient de f, si $p = 1$. C'est un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Il sera noté $\nabla f(a)$.
- La dérivée de f, si $n = 1$. C'est un vecteur de $\mathbb{R}^p$. Il sera noté $f'(a)$.

Nous donnons maintenant les définitions de $M_f(a)$, $\nabla f(a)$ et $f'(a)$.

Définition 6.8 (Matrice jacobienne, gradient, dérivée) *Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in \Omega$. On suppose que f est différentiable en a.*

1. *(Matrice jacobienne) La matrice jacobienne de f en a, que nous noterons $M_f(a)$, est la matrice de p lignes et n colonnes dont le coefficient de la i-ème ligne et j-ème colonne est $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.*
2. *(Gradient) On suppose ici que $p = 1$. Le gradient de f en a, noté $\nabla f(a)$, est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la j-ème composante est $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.*
3. *(Dérivée) On suppose ici que $n = 1$. La dérivée de f en a, notée $f'(a)$, est le vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont la i-ème composante est $f_i'(a)$. (Il n'y a pas ici de dérivée partielle car il n'y a qu'une seule variable.)*

Nous allons maintenant faire le lien entre différentielle, matrice jacobienne, gradient et dérivée. En pratique, on confond le vecteur x de $\mathbb{R}^n$, dont les composantes sont $x_1, \ldots, x_n$, avec la matrice à n lignes et 1 colonne formée avec $x_1, \ldots, x_n$, c'est-à-dire la matrice $\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^t$ (appelée aussi "vecteur colonne"). Cette confusion nous permet d'écrire la remarque 6.5.

Remarque 6.5 (différentielle, matrice jacobienne, gradient et dérivée) *Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in \Omega$. On suppose que f est différentiable en a.*

1. *(Différentielle et matrice jacobienne) Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, on a $df(a)(h) = M_f(a)h$ (où $M_f(a)h$ désigne le produit de la matrice jacobienne avec la matrice à n lignes et 1 colonne que l'on confond avec le vecteur h).*
2. *(Différentielle, matrice jacobienne et gradient) Si $p = 1$, la matrice jacobienne est une matrice à 1 ligne et n colonnes. Le gradient de f en a est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ que l'on confond donc avec une matrice à n lignes et 1 colonne, cette matrice est la transposée de la matrice jacobienne, c'est-à-dire $\nabla f(a) = M_f(a)^t$. On a donc :*

$$df(a)(h) = M_f(a)h = \nabla f(a) \cdot h, \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}^n.$$

3. *(Différentielle, matrice jacobienne et dérivée) Si $n = 1$, la matrice jacobienne est une matrice à n lignes et 1 colonne. La dérivée f en a est un vecteur de $\mathbb{R}^p$ que l'on confond donc avec une matrice à p lignes et 1 colonne. Cette matrice est la matrice jacobienne, c'est-à-dire $f'(a) = M_f(a)$. On a donc :*
$$df(a)(h) = M_f(a)h = hf'(a), \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}.$$

Remarque 6.6 (Quelques notations) Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$ et f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ de classe C^1. On note $f_1, \ldots, f_p$ les composantes de f (de sorte que, pour chaque i, f_i est une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On note aussi $x_1, \ldots, x_n$ les composantes de x.

1. (Gradient) Le gradient de f au point x, notée $\nabla f(x)$, est une matrice de n lignes à p colonnes. Sa i-ème colonne est le gradient au point x de la fonction f_i (remarquer que $\nabla f_i(x)$ est bien un élément de $\mathbb{R}^n$, aussi identifié à une matrice à n lignes et 1 colonne).

2. (Divergence) On suppose ici $n = p$. La divergence de f au point x est le nombre réel, $\operatorname{div} f(x)$, défini par
$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x).$$
La fonction $\operatorname{div} f$ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

3. (Rotationnel pour $n = p = 2$). On suppose ici $n = p = 2$. Le rotationnel de f au point x est le nombre réel, $\operatorname{rot} f(x)$, défini par
$$\operatorname{rot} f(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x).$$
La fonction $\operatorname{rot} f$ est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

4. (Rotationnel pour $n = p = 3$). On suppose ici $n = p = 3$. Le rotationnel de f au point x, noté $\operatorname{rot} f(x)$, appartient à $\mathbb{R}^3$, il est défini par
$$\operatorname{rot} f(x) = \Big(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)\Big)^t.$$
La fonction $\operatorname{rot} f$ est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Remarque 6.7 (base canonique et représentation d'une application linéaire)
Soit $n \geq 1$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note e_i l'élément de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la i-ème, cette i-ème composante valant 1. On rappelle que la famille $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ (et s'appelle "base canonique de $\mathbb{R}^n$"). Si $x \in \mathbb{R}^n$ a pour composantes $x_1, \ldots, x_n$, la décomposition de x dans cette base est (avec les opérations usuelles dans $\mathbb{R}^n$ d'addition et de multiplication pas un nombre réel) :
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$
Soit maintenant $n, p \in \mathbb{N}^\star$ et T une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a donc, en notant $x_1, \ldots, x_n$ les composantes de x et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$:
$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i).$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, le vecteur $T(e_i)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^p$ (on le confond donc avec une matrice à p lignes et 1 colonne). On note A la matrice (à p lignes et n colonnes) dont, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la i-ème colonne est formée de $T(e_i)$. On a alors $T(x) = Ax$ (le vecteur x de $\mathbb{R}^n$ est confondu avec une matrice à n lignes et 1 colonne). La matrice A est la matrice qui représente l'application linéaire T dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

Proposition 6.4 (Différentielle d'une fonction composée) *Soit $n, p, q \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, O un ouvert de $\mathbb{R}^p$, f une application de Ω dans $\mathbb{R}^p$ et g une application de O dans $\mathbb{R}^q$. Soit $a \in \Omega$. On suppose que f est différentiable en a, $f(a) \in O$ et g différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ (qui est bien définie au voisinage de a) est différentiable en a et $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$, ou encore, avec les matrices jacobiennes, $M_{g \circ f}(a) = M_g(f(a))M_f(a)$.*

Exemple 6.2 On considére ici une application de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ mais définie "en passant par $\mathbb{R}^2$". c'est-à-dire que γ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ et φ est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que γ et φ sont de classe C^1 et on considère la fonction $f = \varphi \circ \gamma$, de sorte que f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la proposition 6.4 donne

$$f'(t) = d\varphi(\gamma(t))(\gamma'(t)) = M_\varphi(\gamma(t))\gamma'(t).$$

Noter que $d\varphi(\gamma(t))$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (représentée par la matrice $M_\varphi(\gamma(t))$ de 1 ligne et 2 colonnes) et que $\gamma'(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$. En notant γ_1 et γ_2 les deux composantes de γ, on a aussi

$$f'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\gamma(t))\gamma_2'(t).$$

On note $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. On a donc $f(0) = \varphi(a)$ et $f(1) = \varphi(b)$. Comme f est de classe C^1, le chapitre 5 (voir la remarque 5.8) donne

$$\varphi(b) - \varphi(a) = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t) = \int_0^1 d\varphi(\gamma(t))(\gamma'(t))dt.$$

Le terme de droite, c'est-à-dire $\int_0^1 d\varphi(\gamma(t))(\gamma'(t))dt$, s'appelle "intégrale de la différentielle de φ le long du chemin $\{\gamma(t),\, t \in [t_0, t_1]\}$" (ce "chemin" est un "arc de courbe" dans $\mathbb{R}^2$). Nous venons de démontrer que cette intégrale ne dépend donc que des extrémités du chemin c'est-à-dire de a et b (et, bien sûr, de φ) et non de l'ensemble du chemin (pourvu que celui ci soit de classe C^1, cette hypothèse peut être légèrement affaiblie).

Remarque 6.8 (Intégrale le long d'un chemin) Soit $d \geq 1$ et f une application continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Soit $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1$, et γ une application de $[t_0, t_1]$ dans $\mathbb{R}^d$ de classe C^1 sur $[0, 1]$ (ce qui signifie que γ se prolonge en une application de classe C^1 sur tout $\mathbb{R}$). On définit l'"intégrale de f le long de γ" en posant :

$$\int_\gamma f = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

On dit aussi que γ est une "arc" allant de a à b, où $a = \gamma(t_0)$ et $b = \gamma(t_1)$. Si $a = b$, on dit que l'arc est fermé et la quantité $\int_\gamma f$ est souvent notée $\oint_\gamma f$.

On utilise parfois la notion de dérivée dans une direction donnée, on donne ci après la définition de cette dérivée (en se limitant au cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Définition 6.9 (Dérivée directionnelle) *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \Omega$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Pour $t \in \mathbb{R}$ t.q. $a + tx \in \Omega$, on pose $g(t) = f(a + xt)$ (comme Ω est ouvert, la fonction g est donc définie sur un voisinage de 0). On dit que f admet une dérivée en a dans la direction x si la fonction $t \mapsto \frac{g(t)-g(0)}{t}$ admet une limite à droite en 0. On note $f'_x(a)$ cette limite, c'est-à-dire :*

$$f'_x(a) = \lim_{t\to 0, t>0} \frac{f(a + tx) - f(a)}{t}.$$

Avec les notations de la définition 6.9, il est assez facile de voir que si f est différentiable en a, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, f admet une dérivée en a dans la direction x et cette dérivée est $f'_x(a) = df(a)(x)$. Ceci est une conséquence de la proposition 6.4 (voir l'exercice 6.4). Par contre l'existence de la dérivée directionnelle en a dans toutes les directions (c'est-à-dire pour tout $x \neq 0$) ne donne par la différentiabilité de f en a (exercice 6.5).

Définition 6.10 (Norme d'une application linéaire) *Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$ et f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. On définit alors la norme de f par la formule suivante :*

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{|x|}.$$

(Cette application est bien une norme sur l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, qui est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.)

Si f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, on peut remarquer que

$$|f(x)| \leq \|f\||x| \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \tag{6.7}$$

Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. On rappelle (théorème 3.2) que si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, il existe $c \in]a, b[$ t.q. $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Ce résultat peut être mis en défaut pour une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ dès que $p > 1$, comme le montre l'exemple suivant :

On prend ici $n = 1$, $p = 2$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est le vecteur dont les composantes sont $\cos(x)$ et $\sin(x)$, c'est-à-dire $f(x) = (\cos(x), \sin(x))^t$. L'application f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et la matrice jacobienne de f au point x est $M_f(x) = (-\sin(x), \cos(x))$. On prend maintenant $a = 0$ et $b = 2\pi$ et on remarque que, pour tout $c \in \mathbb{R}$ on $f(b) - f(a) \neq df(c)(b - a)$. En effet, on a $f(b) - f(a) = 0$ et $df(c)(b - a) = M_f(c)(b - a) = 2\pi(-\sin(c), \cos(c))^t \neq 0$ car $\sin(c)$ et $\cos(c)$ ne s'annule jamais tous les deux pour une même valeur de c.

On va toutefois donner une généralisation convenable du théorème des accroissements finis (théorème 6.1). Pour cela, si $n \geq 1$ et $a, b \in \mathbb{R}^n$, on note $]a, b[= \{ta + (1-t)b, t \in]0, 1[\}$ et $[a, b] = \{ta + (1-t)b, t \in [0, 1]\}$

Théorème 6.1 (Théorème des Accroissements Finis, cas vectoriel) *Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application continue de Ω dans $\mathbb{R}^p$. Soit $a, b \in \Omega$ t.q. $[a, b] \subset \Omega$, $a \neq b$. On suppose f différentiable en tout point de $]a, b[$. On a alors :*

$$|f(b) - f(a)| \leq \left(\sup_{c\in]a,b[} \|df(c)\|\right) |b - a|.$$

Démonstration : On donne ici une démonstration consistant à se ramener au théorème des accroissements finis pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (théorème 3.2). Mais, cette démonstration est limitée au choix de la norme euclidienne dans l'espace $\mathbb{R}^p$ (choix que nous avons fait pour tout ce chapitre) alors que le résultat est vrai pour tout choix de norme sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ (la démonstration doit alors être légèrement modifiée).

Pour $t \in [0,1]$, on a $tb+(1-t)a \in \Omega$ et on pose $\varphi(t) = (f(tb+(1-t)a) - f(a)) \cdot (f(b) - f(a))$. La fonction φ est donc continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Par dérivation de fonctions composées, elle est aussi dérivable sur $]0,1[$ et on a, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\varphi'(t) = df(tb+(1-t)a)(b-a) \cdot (f(b) - f(a)).$$

On peut alors utiliser le théorème 3.2 sur la fonction φ. On obtient qu'il existe $s \in]0,1[$ t.q.

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(s) = df(sb+(1-s)a)(b-a) \cdot (f(b) - f(a)).$$

On remarque maintenant que $\varphi(1) = |f(b) - f(a)|^2$ et $\varphi(0) = 0$. En posant $y = sb + (1-s)a$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (inégalité (6.4)) on a donc

$$|f(b) - f(a)|^2 = df(y)(b-a) \cdot (f(b) - f(a)) \leq |df(y)(b-a)||f(b) - f(a)|.$$

On en déduit, avec (6.7)

$$|f(b) - f(a)| \leq \|df(y)\||b-a| \leq \left(\sup_{c \in]a,b[} \|df(c)\|\right) |b-a|.$$

Ce qui termine cette démonstration. ∎

Définition 6.11 (Fonctions de classe C^k) *Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}^p$.*

1. *On dit que f est classe C^0 sur Ω si f est continue sur Ω, c'est-à-dire continue en tout point de Ω. On note alors $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^p)$ ou $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^p)$.*
2. *On dit que f est classe C^1 sur Ω si f est différentiable en tout point de Ω et que, pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,p\} \times \{1,\ldots,n\}$, la fonction $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ est continue sur Ω. On note alors $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$.*
3. *Pour $k \geq 2$, on dit que f est de classe C^k (et on écrit $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$) si f est différentiable en tout point de Ω et les fonctions $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sont de classe C^{k-1} sur Ω (pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,p\} \times \{1,\ldots,n\}$).*
4. *On dit que f est classe C^∞ sur Ω (et on écrit $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$) si f est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Si A est une partie de $\mathbb{R}^n$, on définit l'adhérence de A comme étant le plus petit fermé contenant A. Cet ensemble existe bien, c'est l'intersection de tous les fermés contenant A. On le note en général $\bar{A}$. Lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$, il est parfois utile de considérer les applications de classe C^k définies sur $\bar{\Omega}$. Nous définissons cette notion dans la définition 6.12.

Définition 6.12 (Fonctions de classe C^k sur $\bar{\Omega}$) *Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^p$. Pour $k \geq 0$ ou $k = \infty$, on dit que f est classe C^k sur $\bar{\Omega}$ (et on écrit $f \in C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^p)$) si f est la restriction à $\bar{\Omega}$ d'une fonction de classe C^k sur $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 6.9 La définition 6.12 mérite un commentaire pour le cas $k = 0$. Sous les hypothèses de la définition 6.12, on peut montrer que f est de classe C^0 sur $\bar{\Omega}$ (c'est-à-dire f est la restriction à $\bar{\Omega}$ d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$) si et seulement si f est continue en tout point de $\bar{\Omega}$. Cette équivalence est difficile à montrer (sauf pour des ouverts particuliers). Le point délicat est de montrer qu'une fonction définie sur $\bar{\Omega}$ et continue en tout point de $\bar{\Omega}$ peut se prolonger en une fonction continue sur tout $\mathbb{R}^n$. Une méthode pour montrer ce résultat est donnée dans l'exercice 6.10.

Proposition 6.5 (C^k est un e.v.) *Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$, $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors, $C^k(\Omega, \mathbb{R}^p)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 6.6 (Existence de la différentielle) *Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}^p$. On suppose que f admet des dérivées partielles en tout point de Ω.*

1. *Soit $a \in \Omega$. On suppose que les dérivées partielles de f sont continues en a. Alors, f est différentiable en a.*
2. *On suppose que $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$. Alors , f est différentiable en tout point de Ω.*

Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}^p$. Si f est de classe C^2, les dérivées partielles de $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ admettent elle-mêmes des dérivées partielles. On note, pour $a \in \Omega$, $i \in \{1, \ldots, p\}$ et $(j, k) \in \{1, \ldots, n\}^2$:

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(a) = \frac{\partial(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})}{\partial x_k}(a).$$

Le théorème 6.2 compare $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(a)$ et $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(a)$.

Théorème 6.2 (Dérivées croisées) *Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}^p$. On suppose f de classe C^2. On a alors $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(a)$ pour tout $a \in \Omega$, tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et tout $(j, k) \in \{1, \ldots, n\}^2$.*

Remarque 6.10 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et g_1, g_2 deux applications de Ω dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse à l'application $a \mapsto g_1(a)dx_1 + g_2(a)dx_2$, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Cette application, notée $g_1dx_1 + g_2dx_2$, est la "forme différentielle" associée à g_1, g_2. On suppose maintenant que g_1 et g_2 sont de classe C^1 et on se demande si il existe une application f de Ω dans $\mathbb{R}$, différentiable et t.q., pour tout $a \in \Omega$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = g_1(a) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = g_2(a).$$

Dans ce cas, on dit que la forme différentielle $g_1dx_1 + g_2dx_2$ est "exacte" et on a $df = g_1dx_1 + g_2dx_2$. Une condition nécessaire pour l'existence de f est donnée par le théorème 6.2. Pour que f existe, il faut que, pour tout $a \in \Omega$, $\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(a) = \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(a)$. Lorsque cette dernière condition est satisfaite, on dit que la forme différentielle $g_1dx_1 + g_2dx_2$ est "fermée" (le théorème 6.2 donne donc qu'une forme différentielle exacte, avec g_1 et g_2 de classe C^1, est fermée). Si $\Omega = \mathbb{R}^2$ ou $\Omega = (\mathbb{R}_+^\star)^2$ (qui est une cas intéressant en thermodynamique) ou, plus généralement, si Ω est "étoilé par rapport à un point", cette condition est suffisante (voir l'exercice 6.7), c'est-à-dire qu'une forme différentielle fermée, avec g_1 et g_2 de classe C^1, est exacte. L'exercice 6.8 montre que ce résultat (fermée implique exacte) est faux dans certains ouverts.

Enfin, on termine ce paragraphe en définissant le jacobien d'une application dfférentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ (utile, par exemple, pour les calculs d'intégrales en utilisant des changements de variables).

Définition 6.13 (Jacobien) *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. on suppose f différentiable en a. le jacobien de f est a, noté $J(a)$, est la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de f en a, c'est-à-dire :*

$$J(a) = |det(M_f(a))|.$$

6.3 Recherche d'un extremum

On s'intéresse dans cette section, à la recherche d'un point où une fonction f, définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, atteint son maximum ou son minimum.

Définition 6.14 (Point critique, minima) *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \Omega$.*

1. *On dit que a est un point critique de f si f est différentiable en a et $\nabla f(a) = 0$.*
2. *On dit que f atteint un minimum local en a si il existe $\delta > 0$ t.q. $f(a) \leq f(x)$ pour tout $x \in B(a, \delta)$.*

Proposition 6.7 (Condition nécessaire de minimalité) *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \Omega$. On suppose que f atteint un minimum local en a. Alors, si f différentiable en a, on a $\nabla f(a) = 0$.*

Pour obtenir une condition nécessaire plus précise que celle donnée dans la proposition 6.7 (et aussi pour obtenir une condition suffisante), on suppose dans le proposition 6.8 que f est de classe C^2 sur Ω et on introduit la matrice hessienne de f.

Définition 6.15 (Matrice hessienne) *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$, de classe C^2. Soit $a \in \Omega$. On appelle matrice hessienne de f en a la matrice à n lignes et n colonnes dont le terme à la i-ieme ligne et j-ieme colonne est $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$. On note $H(a)$ cette matrice (c'est une matrice symétrique, grâce au théorème 6.2).*

Proposition 6.8 (Condition nécessaire et condition suffisante de minimalité)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$, de classe C^2. Soit $a \in \Omega$.

1. *(Condition nécessaire) On suppose que f atteint un minimum local en a. On a alors $\nabla f(a) = 0$ et $H(a)$ (matrice hessienne de f en a) est (symétrique) semi-définie positive (c'est-à-dire $H(a)h \cdot h \geq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$).*
2. *(Condition suffisante) On suppose que $\nabla f(a) = 0$ et que $H(a)$ est (symétrique) définie positive (c'est-à-dire $H(a)h \cdot h > 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$). Alors, f atteint un minimum local en a.*

6.4 Exercices

Exercice 6.1 (Limite versus limite uniforme)

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. Donner un exemple de fonction f continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et t.q.
   (a) Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t,s)}{t} = \lambda$.

(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{s\to+\infty} \frac{f(t,s)}{s} = \mu$.

2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

   (a) $\frac{f(t,s)}{t} \to \lambda$ quand $t \to +\infty$, uniformément par rapport à $s \in \mathbb{R}$.

   (b) $\frac{f(t,s)}{s} \to \mu$ quand $s \to +\infty$, uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}$.

   Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $A > 0$ t.q.

   $$-\varepsilon t \le f(t,s) - \lambda t \le \varepsilon t \text{ et } -\varepsilon s \le f(t,s) - \mu s \le \varepsilon s \text{ si } t \ge A \text{ et } s \ge A.$$

   En déduire que $-\varepsilon \le \lambda \le \varepsilon$ et $-\varepsilon \le \mu \le \varepsilon$ puis que $\lambda = \mu = 0$.

Exercice 6.2 (Différentiable implique continu)
Soit $n, p \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in \Omega$. On suppose que f est différentiable en a. Montrer que f est continue.

Exercice 6.3 (Existence des dérivées partielles n'implique pas continuité)
Soit f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \text{ pour } x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2,\ x \ne 0,$$

$$f(0) = 0.$$

Montrer que f admet des dérivées partielles en 0 mais que f n'est pas continue en 0 (et donc que f n'est pas différentiable en 0).

Exercice 6.4 (Différentiable implique existence des dérivées directionnelles)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \Omega$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $x \ne 0$. On suppose que f est différentiable en a, montrer que f est dérivable en a dans la direction x et que $f'_x(a) = df(a)(x)$.

Exercice 6.5 (Existence des dérivées directionnelles n'implique pas continuité)
Pour $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$, $x \ne 0$, il existe un et un seul couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^\star \times [0, 2\pi[$ t.q. $x_1 = \rho\cos(\theta)$ et $x_2 = \rho\sin(\theta)$. On pose alors $f(x) = \frac{\rho^2}{2\pi-\theta}$. On pose aussi $f(0) = 0$ (de sorte que f est définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$).

1. Soit $x \in \mathbb{R}^2$, $x \ne 0$. Montrer que f admet une dérivée en 0 dans la direction x et calculer $f'_x(0)$.

2. Montrer qu'il existe une application T, linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, t.q., pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $x \ne 0$, $f'_x(0) = T(x)$.

3. Montrer que f n'est pas continue en 0 (et donc n'est pas différentiable en 0).

Exercice 6.6 (Mécanique, Analyse et Algèbre)
Soient x et y deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, de classe C^1. On désigne par $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. On note $M(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice dont les deux lignes sont formées par les vecteurs (lignes) $x(t)$ et $y(t)$, $M_x(t)$ la matrice dont les deux lignes sont formées par les vecteurs (lignes) $x'(t)$ et $y(t)$ et $M_y(t)$ la matrice dont les deux lignes sont formées par les vecteurs (lignes) $x(t)$ et $y'(t)$. Enfin, Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(t) = \det(M(t))$ (on rappelle que $N \mapsto \det(N)$ est une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$).

1. Soit f une fonction bilinéaire de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, les applications $z \mapsto f(z,u)$ et $z \mapsto f(u,z)$ sont des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$). On rappelle qu'une application bilinéaire (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$) est nécessairement continue. Pour tout réel t, on pose $g(t) = f(x(t), y(t))$. Montrer que g est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1, et que
$$g'(t) = f(x'(t), y(t)) + f(x(t), y'(t))$$
pour tout $t \in \mathbb{R}$. [On pourra, par exemple, écrire $f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t)) = f(x(t+h) - x(t), y(t+h)) + f(x(t), y(t+h) - y(t))$.]

2. En utilisant la question 1, montrer que φ est de classe C^1 et que $\varphi'(t) = \det(M_x(t)) + \det(M_y(t))$ (On rappelle que $\varphi(t) = \det(M(t))$).

3. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe une matrice $A(t) = \begin{bmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) \end{bmatrix}$ t.q. $M'(t) = A(t)M(t)$.

   (a) Montrer que $M_x(t) = X(t)M(t)$ et $M_y(t) = Y(t)M(t)$ avec
   $$X(t) = \begin{bmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) \end{bmatrix}.$$

   (b) Montrer que $\det(M_x(t)) = a_{1,1}(t)\det(M(t))$ et $\det(M_y(t)) = a_{2,2}(t)\det(M(t))$. En déduire que $\varphi'(t) = \text{trace}(A(t))\varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (avec $\varphi(t) = \det(M(t))$).

NB: Les courageux pourront montrer que le résultat de la question 4 (c'est-à-dire $\varphi'(t) = \text{trace}(A(t))\varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$) est encore vrai si la matrice M(t) est formée de n vecteurs lignes $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ de $\mathbb{R}^n$ et que $M'(t) = A(t)M(t)$ avec $n \geq 1$ et $x_1, \ldots, x_n$ fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^1.

Exercice 6.7 (Si Ω est étoilé, une forme différentielle fermée est exacte)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et g_1, g_2 deux applications de Ω dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 et t.q., pour tout $a \in \Omega$, $\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(a) = \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(a)$. On suppose aussi qu'il existe $b \in \Omega$ t.q. pour tout $a \in \Omega$, l'intervalle $[b, a]$ est inclus dans Ω (on dit alors que Ω est étoilé par rapport à b). On note b_1 et b_2 les composantes de b. Pour $a = (a_1, a_2)^t \in \Omega$, on pose
$$f(a) = (a_1 - b_1)\int_0^1 g_1(ta + (1-t)b)dt + (a_2 - b_2)\int_0^1 g_2(ta + (1-t)b)dt.$$
Montrer que f est une application différentiable de Ω dans $\mathbb{R}$ et que, pour tout $a \in \Omega$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = g_1(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = g_2(a)$. (On a donc $df = g_1 dx_1 + g_2 dx_2$.)

Exercice 6.8 (Exemple de forme différentielle fermée et non exacte)

Soit $0 \leq \alpha < \beta$. On pose $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2, \alpha < |x| < \beta\}$. Pour $x = (x_1, x_2)^t \in \Omega$, on pose
$$g_1(x) = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \text{ et } g_2(x) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

1. Montrer que la forme différentielle $g_1 dx_1 + g_2 dx_2$ est fermée (dans Ω).

2. (Difficile) Montrer que la forme différentielle $g_1 dx_1 + g_2 dx_2$ n'est pas exacte (dans Ω). [On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le résultat de l'exemple 6.2 avec un chemin γ bien choisi.]

Exercice 6.9 (Calcul de dérivées partielles)

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à n lignes et n colonnes, et Ω l'ensemble des matrices A de $M_n(\mathbb{R})$ t.q. $\det(A) > 0$. Pour $A \in \Omega$, on pose $f(A) = \ln(\det(A))$.

Une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ a n^2 composantes. On peut donc identifier $M_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$. La fonction f devient alors une application d'une partie de $\mathbb{R}^{n^2}$ (notée aussi Ω) dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^{n^2}$ et que f est continue.
2. Soit $A \in \Omega$. On note $a_{i,j}$ les composantes de A et $b_{i,j}$ les composantes de A^{-1}. Montrer que f admet des dérivée partielles en A et que
$$\frac{\partial f}{\partial a_{i,j}}(A) = b_{i,j} \text{ pour tout } i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$
3. Soit $A \in \Omega$. Montrer que f est différentiable en A et donner $df(A)(H)$.

[On pourra commencer par les cas $n = 1$ et $n = 2$. Le cas général est nettement plus difficile.]

Exercice 6.10 (Prolongement d'une fonction continue)

Soit $n \geq 1$, Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et φ une application continue de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une application ψ continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $\psi = \varphi$ sur $\bar{\Omega}$. La méthode proposée ici demande la connaissance de la théorie de l'intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$. Elle demande des connaissances non développées dans ce cours (enseignées, en général, plutôt dans la troisème année de Licence).

Pour $x \notin \bar{\Omega}$, on note $d_x = \inf_{y \in \bar{\Omega}} |x - y|$ (cette quantité s'appelle la "distance de x à $\bar{\Omega}$"), on pose $A_x = B(x, 2d_x) \cap \Omega$ et
$$\psi(x) = \frac{\int_{A_x} \varphi(z) dz}{\int_{A_x} dz}.$$
(On commencera par remarquer que $d_x > 0$ et que $\int_{A_x} dz > 0$.)

Pour $x \in \bar{\Omega}$, on pose $\psi(x) = \varphi(x)$.

Montrer que ψ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6.11 (Connexité par arc)

Soit $n \geq 1$ et Ω une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que Ω est connexe par arc si pour tout $a, b \in \Omega$ il existe $\gamma \in C([0, 1], \Omega)$ t.q. $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

1. On suppose ici que $n = 1$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$. Montrer que Ω est connexe par arc si et seulement si Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. On suppose ici que $n > 1$. Montrer que les ensembles suivants sont connexes par arc :
   (a) $\mathbb{R}^n$,
   (b) $\{(x, y)^t,\ x \in \mathbb{R}_+^\star,\ y \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ (cet ensemble est souvent noté $\mathbb{R}_+^n$),
   (c) $\{x \in \mathbb{R}^n,\ r|x| < R\}$ avec $0 \leq r < R \leq +\infty$ donnés.

N.B. On peut montrer (mais ce n'est pas demandé dans cet exercice) que si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ connexe par arc il existe alors pour tout $a, b \in \Omega$ une application γ appartenant à $C^\infty([0,1],\Omega)$ t.q. $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Exercice 6.12 (Force conservative et potentiel associé)

Le but de cet exercice, lié au cours de mécanique de première année de licence, est de montrer que "une force est conservative si et seulement elle dérive d'un potentiel" et de donner quelques exemples (gravité sur terre, gravité universelle, ressort, moteur).

Soit $d \geq 1$ et Ω un ouvert connexe par arc de $\mathbb{R}^d$ (voir l'exercice 6.11). C'est pour être en mesure de donner des exemples intéressants que l'exercice n'est pas limité au cas $\Omega = \mathbb{R}^d$ (pour l'exemple de gravité universelle, on prendra $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3,\ R_0 < |x| < +\infty\}$, où R_0 est le rayon de la terre assimilé à un boule de $\mathbb{R}^3$ de centre 0).

On rappelle tout d'abord quelques notions utilisées en mécanique. On considère un mobile, assimilé à un point de masse m, se déplaçant dans Ω. Ce mobile est soumis à une ou plusieurs forces. Une force s'exerçant sur ce mobile est dite "conservative" si elle vérifie les deux conditions suivantes :

(c1) Elle ne dépend que de la position du mobile. Il existe donc une fonction F de Ω dans $\mathbb{R}^d$ t.q. cette force vaut $F(x)$ lorsque le mobile est au point x de Ω. Cette fonction F est alors supposée être continue (cette condition peut être affaible en "continue par morceaux").

(c2) Le travail de cette force lorsque le mobile va du point a au point b ne dépend que des points a et b. Plus précisément, soit $a, b \in \Omega$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1$ et $\gamma \in C^1([t_0,t_1],\Omega)$ (ou seulement $\gamma \in C([t_0,t_1],\Omega)$ et γ de classe C^1 par morceaux, cette généralisation est utile) avec $\gamma(t_0) = a$ et $\gamma(t_1) = b$. Un tel γ est appelé "chemin allant de a à b". Le travail de la force considérée est alors

$$W_{F,\gamma}(a,b) = \int_{t_0}^{t_1} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt. \tag{6.8}$$

On demande donc que $W_{F,\gamma}(a,b)$ ne dépende que de a et b (et F, bien sûr) mais non de la fonction γ toute entière.

1. On considère dans cette question une force s'exerçant sur le mobile et vérifiant la condition $(c1)$ donnée ci-dessus. Cette force vaut donc $F(x)$ lorsque le mobile est au point x de Ω.

   (a) On suppose qu'il existe une fonction E_p de Ω dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 t.q.

   $$F(x) = -\nabla E_p(x) \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

   Montrer que $W_{F,\gamma}(a,b) = E_p(a) - E_p(b)$ pour tout γ allant de a à b. En déduire que la force considérée est conservative (c'est-à-dire vérifie la condition donnée en $(c2)$).

   N. B. La quantité $E_p(x)$ est l'énergie potentielle associée à la force $F(x)$. Cette énergie est définie à une constante additive près (voir la question suivante). La quantité significative est la différence d'énergie potentielle entre deux points de Ω.

   (b) (Question difficile) Réciproquement, on suppose maintenant que cette force est conservative (c'est-à-dire vérifie la condition $(c2)$ donnée ci-dessus). Montrer qu'il existe une fonction E_p de Ω dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 t.q. $F(x) = -\nabla E_p(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

   [Indication : Soit $a \in \Omega$. Pour $x \in \Omega$, on définit alors $E_p(x)$ par $E_p(x) = -W_{F,\gamma}(a,x)$ où γ est chemin allant de a à x (comme F est conservative et que a est fixé, $W_{F,\gamma}(a,x)$ ne dépend que de x et pas de γ dés que γ va bien de a à x). Soit $x \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, t.q. $B(x,h) \subset \Omega$. On montre tout d'abord que $E_p(x+h) - E_p(x) = W_{F,\gamma}(x, x+h)$ où γ est un chemin allant de x à $x+h$. En choisissant un γ particulièrement simple, on en déduit ensuite que $E_p(x+h) - E_p(x) = -F(x) \cdot h + \varepsilon(h)|h|$ avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.]

Montrer que E_p est unique à une constante additive près.

2. Dans cette question, on suppose que $d = 1$. L'ensemble Ω est donc un intervalle de $\mathbb{R}$ (voir l'exercice 6.11). On suppose que la force en question vérifie l'hypothèse ($c1$). Cette force vaut donc $F(x)$ lorsque le mobile est au point x (avec $F \in C(\Omega, \mathbb{R})$). Montrer que la force est conservative et donner une énergie potentielle associée. [Pour montrer que F est conservative, le plus rapide est de donner une énergie potentielle associée.]

3. On donne ici quelques exemples de force. Pour chacun de ces exemples, montrer que la force est conservative et donner une énergie potentielle associée.

   (a) (Gravité au voisinage de la terre). On prend $d = 1$, $\Omega =]0, +\infty[$ et on suppose que la force est égale en tout point à $-mg$ où $g = 9,81$ (en unités SI : m/s^2).

   (b) (Moteur) On prend $d = 1$, $\Omega =]-\infty, +\infty[$ et on suppose qu'un moteur agit sur le mobile avec une force constante égale à 17 (en unités SI : N).

   (c) (Ressort) On prend $d = 1$, $\Omega =]-A, A[$ avec $A > 0$. On suppose que la force est égale en tout point x de Ω a $-kx$, avec $k > 0$ donné (le nombre k est appelé “raideur du ressort”).

   (d) (Gravité universelle). On note M_T la masse de la terre, R_0 son rayon (la terre étant assimilée à une boule, R_0 vaut environ 6000 kms) et G la constante de gravité universelle. On prend $d = 3$ et $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3,\ R_0 < |x| < +\infty\}$. La force de gravité s'exerçant sur le mobile au point x est le vecteur F de $\mathbb{R}^3$ t.q. $|F| = -\frac{mM_TG}{|x|^2}$ et $F \cdot x = -|F||x|$ (ce qui donne $F = -|F|\frac{x}{|x|}$).

Exercice 6.13 (Un skieur sur un téléski)

Un skieur est considéré comme un mobile assimilé à un point se déplaçant sur la demi-droite $]-1, +\infty[$. Au temps $t \geq 0$, le mobile est au point $x(t)$ de la demi-droite. La fonction $t \mapsto x(t)$ est supposée être ce classe C^1. Pour $t = 0$, on a $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$. Ce mobile est soumis à trois forces :

- La gravité, qui est supposé constante et s'écrit $F_g = -mg\sin(\alpha)$ (m est la masse du skieur, $g = 9.81$ et α est l'angle, positif, supposé constant, entre la pente du téléski et la direction horizontale).

- La traction du câble, que nous supposerons constante lors du trajet du skieur (ce qui n'est pas tout à fait réaliste), et que nous noterons F_m (F_m est un nombre strictement positif, supérieur à $mg\sin\alpha \ldots$).

- La force des frottements sur la neige. Cette force dépend de la vitesse du skieur. A l'instant t cette force, notée F_f, est égale à $-\beta x'(t)$, où β est un nombre strictement positif donné.

1. Montrer que les deux premières forces décrites ci dessus sont conservatives et donner des énergies potentielles correspondantes (voir l'exercice 6.12). Dans la suite, ces énergies, au point x, sont notées $E_{pg}(x)$ (pour l'énergie potentielle liée la gravité au point x) et $E_{pm}(x)$ (pour l'énergie potentielle liée à la traction du câble).

2. La fonction $t \mapsto x(t)$ est supposée être de classe C^1. Pour $t > 0$, on note $W_F(t)$ le travail de la force F entre les instants 0 et t (voir l'exercice 6.12 pour la définition du travail d'une force). Le théorème de l'énergie cinétique entre les instants 0 et t donne alors

$$\frac{1}{2}m(x'(t))^2 = W_{F_g}(t) + W_{F_m}(t) + W_{F_f}(t).$$

Montrer que cette égalité est identique aux deux égalités suivantes :

$$\frac{1}{2}m(x'(t))^2 + E_{pg}(t) - E_{pg}(0) = W_{F_m}(t) + W_{F_f}(t),$$

et

$$\frac{1}{2}m(x'(t))^2 + E_{pg}(t) - E_{pg}(0) + E_{pm}(t) - E_{pm}(0) = W_{F_f}(t).$$

(Ces deux dernières égalités portent souvent le nom de "théorème de l'énergie mécanique".)

3. On suppose que x est de classe C^2. La relation fondamentale de la dynamique donne que pour tout $t \geq 0$ $mx''(t)$ est égal à la somme des forces agissant sur le mobile à l'instant t. Résoudre l'équation différentielle ainsi obtenue et donner la limite de $x'(t)$ quant $t \to +\infty$ (en fonction de m, g, α, F_m et β).

Exercice 6.14 (Une égalité importante en thermodynamique)

Soit φ et ψ deux fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+^\star$. On suppose que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$, on a

$$x = \varphi(\psi(x, y), y).$$

On note $\partial_1\varphi$ la dérivée de φ par rapport à sa première variable et $\partial_2\varphi$ la dérivée de φ par rapport à sa seconde variable (et de même pour ψ).

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$ (x est donc fixé pour cette question). Pour $y \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose $h(y) = \varphi(\psi(x, y), y)$. Vérifier (avec la proposition sur la dérivation de fonctions composées) que h est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^\star$ et que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$h'(y) = \partial_1\varphi(\psi(x, y), y)\partial_2\psi(x, y) + \partial_2\varphi(\psi(x, y), y).$$

2. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$ on a

$$\partial_2\varphi(\psi(x, y), y) = -\partial_1\varphi(\psi(x, y), y)\partial_2\psi(x, y).$$

Pour $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose

$$\alpha(x, y) = \frac{1}{x}\partial_2\varphi(\psi(x, y), y),\ \beta(x, y) = \frac{1}{\psi(x, y)}\partial_2\psi(x, y) \text{ et } \chi(x, y) = -\frac{1}{x}\partial_1\varphi(\psi(x, y), y).$$

3. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$, montrer que

$$\alpha(x, y) = \chi(x, y)\psi(x, y)\beta(x, y). \tag{6.9}$$

N.B. : Souvent, pour une fonction φ de $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+^\star$, on note $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ la dérivée de φ par rapport à sa première variable et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ la dérivée de φ par rapport à sa seconde variable. Cette notation (très courante) peut préter à confusion car il ne faut pas confondre $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et la dérivée (par rapport à x, la variable y étant fixée) de la fonction $x \mapsto \varphi(\psi(x,y),y)$. Si on note g cette dernière fonction, sa dérivée est

$$g'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\psi(x,y),y)\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y).$$

Application à la thermodynamique Pour un système thermodynamique, les trois quantités “volume”, notée V, “pression”, notée p et “température”, notée T, ne sont pas indépendantes. Plus précisément, il existe des fonctions φ et ψ de $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+^\star$, de classe C^1, t.q.

$$V = \varphi(p,T) \text{ et } p = \psi(V,T).$$

Avec les notations de la thermodynamique, l'égalité (6.9) est

$$\alpha = \chi p \beta,$$

où

$$\alpha = \frac{1}{V}\big(\frac{\partial V}{\partial T}\big)_{|p},\ \beta = \frac{1}{p}\big(\frac{\partial p}{\partial T}\big)_{|V} \text{ et } \chi = -\frac{1}{V}\big(\frac{\partial V}{\partial p}\big)_{|T}.$$

Exercice 6.15 (Calcul de le divergence d'une fonction particulière) Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Pour $x \in \mathbb{R}^3$, $x \neq 0$, pn pose $E(x) = f(r)x$, avec $r = |x|$. (On rappelle que $|x|$ désigne la norme euclidienne de x.)
Montrer que E est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^{3\star}$ dans $\mathbb{R}^3$ et que pour tout $x \neq 0$,

$$\text{div}E(x) = rf'(r) + 3f(r).$$

Exercice 6.16 (Non dérivabilité de la fonction distance)

Soit $n \geq 1$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme, notée $\|\cdot\|$.

1. Montrer que l'application $u \mapsto \|u\|$ n'est pas différentiable en 0.

corrigé

Soit $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$.. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = \|tu\|$. On a donc donc $f(t) = t\|u\|$ si $t > 0$ et $f(t) = -t\|u\|$ si $t < 0$. Comme $\|u\| \neq 0$, on en déduit que f n'est pas dérivable en 0 (et donc que l'application $v \mapsto \|v\|$ n'est pas différentiable en 0, sinon f serait dérivable par dérivation de fonctions composées).

---

2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et d une distance sur U. Montrer que d n'est pas différentiable sur $U \times U$.

corrigé

On suppose que d est différentiable. Soit $u \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$ et $a > 0$ tel que $u + tv \in U$ si $|t| < a$ (un tel a existe car U est ouvert).

Pour $|s| < a$ et t tel que $|t + s| < a$, on pose

$\varphi_s(t) = d(u + sv + tv, u + sv)$ (la fonction φ_s est donc définie au voisinage de 0 et est dérivable car d est différentiable)

Comme $\varphi_s(0) = 0$ et que φ_s est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a $\varphi_s'(0) = 0$.

On utilise maintenant l'inégalite triangulaire

$d(u + tv + sv, u) \leq d(u + tv + sv, u + sv) + d(u + sv, u)$, c'est-à-dire

$\varphi_0(t + s) \leq \varphi_s(t) + \varphi_0(s)$.

Pour $t > 0$, on en déduit (comme $\varphi_s(0) = 0$)

$(1/t)(\varphi_0(t + s) - \varphi_0(s)) \leq (1/t)(\varphi_s(t) - \varphi_s(0))$,

ce qui donne quand t tend vers 0 (s fixé)

$\varphi_0'(s) \leq \varphi_s'(0) = 0$ (pour tout s entre 0 et a).

La fonction $\varphi_0$est donc (sur l'intervalle $[0, a[$) décroissante positive, nulle en 0. Elle est donc nulle sur tout $[0, a[$, ce qui est impossible (car $\varphi_0(t) > 0$ pour $t > 0$).
