UNE APPROCHE CONSTRUCTIVE DE LA CONJECTURE DE SCHÄFFER

RACHID ZAROUF

Cet exposé présente un certain nombre de résultats que nous avons trouvés en cheminant vers une approche constructive de la conjecture de Schäffer sur la norme d'inverses de matrices. Trois thèmes principaux sont abordés:

1) Le premier est consacré à la question posée par B. L. van der Waerden [SJ] et étudiée par J. J. Schäffer [SJ]: quel est le meilleur $\mathcal{S}(n)$ tel que

$$|\det T| \left\|T^{-1}\right\| \ \leq \ \mathcal{S}(n) \ \ \|T\|^{n-1}$$

pour tout matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et toute norme matricielle induite? Schäffer a prouvé que

$$\mathcal{S}(n) \leq \sqrt{en}$$

et a conjecturé que la suite $(\mathcal{S}(n))_{n\geq 1}$ était bornée quels que soient les choix de la matrice inversible T et de la norme considérées. La conjecture de Schäffer a d'abord été réfutée par J. Bourgain, E. Gluskin, M. Meyer et A. Pajor qui, par une approche probabiliste, ont déterminé une norme appropriée et une suite de matrices $T = T(n)$ telle que la suite $(\mathcal{S}(n))_{n\geq 1}$ est non bornée. Comme le montre Bourgain [GMP, Théorème 5 p. 234], cette approche aboutit en théorie des nombres sur des estimations de sommes de puissances de nombres complexes unimodulaires, sommes dites de Turán [TP].

H. Queffelec [QH] combina le théorème de Bourgain avec une méthode de théorie des nombres dûe à H. Montgomery [MH, Exemple 6, p. 101] pour montrer l'exactitude de l'ordre de croissance de $\mathcal{S}(n)$ dans la majoration initiale de Schäffer en prouvant que

$$\mathcal{S}(n) \geq \sqrt{n}(1 - \mathcal{O}(1/n))$$

d'abord pour $n = p - 1$ avec p premier puis pour tout n en invoquant le postulat de Bertrand.

Les méthodes mentionnées ci-dessus ont en commun qu'elles montrent seulement l'existence de $T = T(n)$ tel que $(\mathcal{S}(n))_{n\geq 1}$ est non bornée. Le calcul de $S(n)$ et la construction d'une suite de matrices explicites $T = T(n)$ telle que $(\mathcal{S}(n))_{n\geq 1}$ est non bornée sont des problèmes ouverts. Nous proposons ici une approche constructive de la conjecture de Schäffer. Nous donnons de nouvelles majorations de $\mathcal{S}(n)$ et construisons une classe explicite de matrices atteignant l'ordre de croissance asymptotique $\sqrt{n}$ dû au théorème de Schäffer. Notre approche se généralise naturellement au cas de la résolvante $(\zeta - T)^{-1}$ et nous permet d'obtenir des estimations exactes de $\|(\zeta - T)^{-1}\|$ pour $|\zeta| \leq \|T\|$, lorsque ζ est bien sûr différent des valeurs propres de T.

2) Un élément clé de notre approche sera d'enquêter sur les normes l_p des coefficients de Fourier de la puissance n-ième d'un automorphisme b du disque unité du plan complexe, un sujet assez largement étudié à part entière et initié par J-P. Kahane [KJP]. Ce dernier

résout le cas $p = 1$: la norme l_1 de b^n est comparable à $\sqrt{n}$. Dans [BS] une formule asymptotique est suggérée pour $p \in [1, +\infty]$ mais démontrée pour $p \in [1, 2]$ seulement. Nous montrons que son domaine de validité est en réalité $[1, 4)$ et calculons le comportement asymptotique correspondant pour p dans $[4, +\infty]$.

3) Enfin, en cours de route, nous étudions le comportement asymptotique (en leur degré) des polynômes de Jacobi, une classe polynômes orthogonaux généralisant ceux de Legendre et ceux de Chebyshev notamment. Il s'agit là aussi d'un sujet largement étudié dans la littérature, mais certains des résultats/preuves publiés sont inutilement compliqués ou faux [CI, IS], même si [IS] prétend qu'il corrige [CI]. Nous donnons une discussion simple et claire et mettons en évidence quelques défauts dans la littérature existante et en particulier corrigeons [IS]. Notre approche est basée sur une nouvelle représentation des polynômes de Jacobi comme somme de deux intégrales dont le comportement asymptotique respectif est étudié en utilisant des méthodes standards: 1) la méthode de Laplace et 2) la méthode de la phase stationnaire.

References

[BS] Blyudze M. , Shimorin S., *Estimates of the norms of powers of functions in certain Banach spaces*, J. Math. Sci. 80-4, 1880-1891, (1996).

[CI] Chen L. -C. , Ismail M. E. H. , *On asymptotics of Jacobi polynomials*, SIAM J. Math. Anal. 22-5, 1442-1449 (1991).

[GMP] Gluskin E. , Meyer M. , Pajor A. , *Zeros of analytic functions and norms of inverse matrices*, Israel J. Math. 87, 225–242 (1994).

[IS] Izen S. H. , *Refined estimates on the growth rate of Jacobi polynomials*, J. Approx. Theory 144-1, 54-66 (2007).

[KJP] Kahane J-P. , *Sur certaines classes de series de Fourier absolument convergentes*, J. Math. Pure Appl. 9-135, 249-259, (1956).

[MH] Montgomery H. L., *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, AMS, coll. CBMS Regional Conference Series in Mathematics. 84, (1994).

[QH] Queffelec H. , *Sur un théorème de Gluskin-Meyer-Pajor,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math. 317, 155–158 (1993).

[SJ] Schäffer J. J. , *Norms and determinants of linear mappings,* Math. Z. 118, 331–339 (1970).

[TP] Turán P. , *On a new method of analysis and its applications*, Pure and Applied Mathematics, New-York (1984).