Calcul matriciel, corrections des exercices

1 Systèmes linéaires

Correction de l'exercice 1.1 (Système linéaire paramétrique)

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 1 \\ 2x & + & my & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 1 \\ & & (4-m)y & = & 1 \end{array}\right.$$

Ce système n'admet de solution que si $m \neq 4$. Dans ce cas, on a donc $\boldsymbol{y = 1/(4-m)}$, et $x = 1-2y$, soit $\boldsymbol{x = (2-m)/(4-m)}$.

Correction de l'exercice 1.2 (Système linéaire paramétrique)

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & (m+1)y & = & m+2 \\ mx & + & (m+4)y & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & (m+1)y & = & m+2 \\ & & (m^2-4)y & = & m(m+2)-3 \end{array}\right.$$

admet une solution si et seulement si $m \neq \pm 2$. Alors, on a $\boldsymbol{y = (m^2+2m-3)/(m^2-4)}$, et $y = m+2-(m+1)y$, soit $\boldsymbol{x = (-m^2-3m-5)/(m^2-4)}$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} mx & + & (m-1)y & = & m+2 \\ (m+1)x & - & my & = & 5m+3 \end{array}\right.$$

2 Matrices, Produits de matrices

Correction de l'exercice 2.1 *1.* Calculons

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 1-i \\ 2 & -i & i \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} 0 & 1+i & -i \\ 1 & 1-i & i-1 \end{pmatrix}$$

conduit à

$$X = \begin{pmatrix} 1 & i & 1-i \\ 2 & -i & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1+i & -i \\ 1 & 1-i & i-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. En additionnant les deux équations membre à membre on obtient

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

d'où

$$Y = X - \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2.2 Produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2.3 Produits de matrices rectangulaires

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2i \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{produit impossible}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \, , \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \, , \qquad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 2 \\ 2i & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2.4 (Associativité du produit matriciel) On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 32 & -1 \\ 36 & 19 \\ 91 & 7 \end{pmatrix} \, , \qquad (AB)C = \begin{pmatrix} -35 & 59 & 185 \\ 21 & 167 & 349 \\ -70 & 217 & 595 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} -1 & 24 & 56 \\ 11 & 0 & -16 \\ 0 & 11 & 25 \\ -6 & 12 & 36 \end{pmatrix} \, , \qquad A(BC) = \begin{pmatrix} -35 & 59 & 185 \\ 21 & 167 & 349 \\ -70 & 217 & 595 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2.5 (Puissances d'une matrice)

1.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \, , \qquad A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \, , \qquad A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3ab^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} \, , \qquad A^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 4ab^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix} \, ,$$

ceci suggère la forme suivante, à montrer par récurrence

(P_n) $$A^n = \begin{pmatrix} a^n & nab^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

- Initialisation : (P_1) est évidemment vraie.
- Hérédité : Supposons (P_n) vraie, et calculons

$$A^{n+1} = A.A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^n & nab^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & nab^n + ab^n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

  et donc (P_{n+1}) est vraie.
- Conclusion : (P_n) est vraie pour tout n.

2.

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

3. Calculons

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C^5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 15 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

La conjecture naturelle est de poser

$$(P_n) \qquad C^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n+1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

à démontrer par récurrence.

- Initialisation : (P_1) est évidemment vraie.
- Hérédité : Supposons (P_n) vraie, et calculons

$$C^{n+1} = C.C^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & n(n+1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 1+n+n(n+1)/2 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  et donc (P_{n+1}) est vraie car $1 + n + n(n+1)/2 = (n+1)(n+2)/2$.
- Conclusion : (P_n) est vraie pour tout n.

3 Inversion, application aux systèmes linéaires

Correction de l'exercice 3.1 (Déterminants)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = \mathbf{11} .$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times (28 - 30) - 0 \times (21 - 25) + 2 \times (18 - 20) = \mathbf{-6} .$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = 1 \times (84 - 90) + 6 \times (18 - 20) = -\mathbf{18}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{4}$$

Correction de l'exercice 3.2 (Matrice de Vandermonde)

$$\begin{aligned} \mathsf{det}(M) &= (yz^2 - zy^2) - (xz^2 - zx^2) + (xy^2 - yx^2) \\ &= yz(z-y) + xz(x-z) + xy(y-x) \\ &= (y-x)[xy - xz] + xz(y-z) + yz(z-y) \\ &= (y-x)[xy - xz] + z(z-y)(y-x) \\ &= (y-x)(x-z)(y-z) \end{aligned}$$

Donc le déterminant de Vandermonde est non nul si et seulement si x, y et z sont tous différents.

Correction de l'exercice 3.3 (Inversion des matrices) 1. Inversion par le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2x' &= y \\ 3x + 5x' &= y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2x' &= y \\ x' &= 3y - y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -6y + 3y' \\ x' &= 3y - y' \end{cases}$$

d'où

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-6} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} .$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+3x' & = & y \\ 4x+5x' & = & y' \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+3x' & = & y \\ x' & = & 2y-y' \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -3y+2y' \\ x' & = & 2y-y' \end{array} \right.$$

d'où

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} .$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x+2y+5z & = & u \\ x+2y+3z & = & v \\ 2x+8y+10z & = & w \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x+2y+5z & = & u \\ 4y+8z & = & u+v \\ 12y+20z & = & 2u+w \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x+2y+5z & = & u \\ 4y+8z & = & u+v \\ 4z & = & u+3v-w \end{array} \right.$$

2. Inverser les matrices ci-dessus en utilisant un déterminant

Correction de l'exercice 3.4 (Systèmes linéaires paramétriques) – Exercice 1.1

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & (m+1)y & = & m+2 \\ mx & + & (m+4)y & = & 3 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & m+1 \\ m & m+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

calculons le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & m+1 \\ m & m+4 \end{vmatrix} = 4-m^2 .$$

Le système admet une solution si et seulement si le déterminant est non nul, c'est à dire ssi $m \neq \pm 2$. Alors, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & m+1 \\ m & m+4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4-m^2}\begin{pmatrix} m+4 & -m-1 \\ -m & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et donc}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4-m^2}\begin{pmatrix} m+4 & -m-1 \\ -m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m+2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4-m^2}$$

$\boldsymbol{y = (-m^2 - 2m + 3)/(4 - m^2)}$, et $y = m+2-(m+1)y$, soit $\boldsymbol{x = (m^2 + 3m + 5)/(4 - m^2)}$.

– Exercice 1.2

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} mx & + & (m-1)y & = & m+2 \\ (m+1)x & - & my & = & 5m+3 \end{array} \right.$$

On peut procéder comme ci-dessus, ou utiliser directement la méthode de Cramer décrite en cours

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m+2 & m-1 \\ 5m+3 & -m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & m-1 \\ m+1 & -m \end{vmatrix}} = \frac{3-6m^2}{1-2m^2} = 3 , \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} m & m+2 \\ m+1 & 5m+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & m-1 \\ m+1 & -m \end{vmatrix}} = \frac{4m^2-2}{1-2m^2} = -2 .$$

Correction de l'exercice 3.5 (Noyau, image et rang) *Le* **noyau** *d'une matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est l'ensemble des vecteurs $X \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = 0$. L'***image** *de la matrice A est l'ensemble des vecteurs $Y \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ tels qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $Y = AX$. Le* **rang** *de A est la dimension de l'image (0 si l'image est le vecteur nul, 1 si c'est une droite vectorielle, 2 si c'est un plan vectoriel,...)*

On se donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} , \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer le noyau de A, B et C.*
2. *Déterminer l'image de A et B.*

Correction de l'exercice 3.6 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

$A^3 - A = 4\mathsf{I}_3$. On a donc $A(A^2 - \mathsf{I}_3) = (A^2 - \mathsf{I}_3)A = 4\mathsf{I}_3$, d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - \mathsf{I}_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4 Applications du calcul matriciel

Correction de l'exercice 4.1 (Diagonalisation et application) *On considère les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} , \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

1. On note V_1, V_2 et V_3 les trois colonnes extraites de P.

$$AV_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 3V_1 , \qquad AV_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2V_2 , \qquad AV_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = V_3 .$$

2. On a clairement

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix} .$$

Calculons l'inverse de P, en posant le système linéaire $PX = Y$

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & u \\ 1 & 0 & 0 & v \\ -2 & 1 & -2 & w \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & -1 & v-u \\ 0 & 1 & 0 & w+2u \end{array}\right)$$

D'où on déduit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

De là, on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

Ce qui est effectivement une matrice diagonale.

3. On voit facilement que

$$D^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad D^3 = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad D^2 = \begin{pmatrix} 71 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \ldots$$

et on peut montrer par récurrence (à faire) que

$$D^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

et reste une matrice diagonale.

4.
$$A = PDP^{-1} \ , \quad A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} \ , \quad A^3 = PD^3P^{-1} \dots A^k = PD^kP^{-1}$$

5. On considère trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par la relation de récurrence
$$x_{n+1} = x_n + 2y_n \ , \qquad y_{n+1} = 3y_n \ , \qquad z_{n+1} = 2x_n - 4y_n + 2z_n \ .$$

a) On voit facilement que
$$U_{n+1} = AU_n \ , \qquad U_n = AU_{n-1} = A^2U_{n-2} = \dots = A^nU_0 \ .$$

b) On pose $W_n = P^{-1}U_n$. On a alors
$$W_n = P^{-1}U_n = P^{-1}AU_{n-1} = P^{-1}APW_{n-1} = DW_{n-1} \ ,$$
et de là par récurrence
$$W_n = D^nW_0 = D^nPU_0 \ .$$
En repassant aux composantes, on peut donc écrire
$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \ .$$

c) Finalement, mettant les choses ensembles, on écrit
$$U_n = P^{-1}D^nPU_0 \ ,$$
soit en composantes
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ 2x_0 + z_0 \\ x_0 - y_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^ny_0 \\ 2^n(x_0 + z_0) \\ x_0 - y_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_0 + (3^n - 1)y_0 \\ 3^ny_0 \\ (2^n - 2)x_0 + 2(1 - 3^n)y_0 + 2^nz_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$
Au final, la solution explicite est de la forme
$$\boldsymbol{\left\{ \begin{array}{lcl} x_n &=& x_0 + (3^n - 1)y_0 \\ y_n &=& 3^ny_0 \\ z_n &=& (2^n - 2)x_0 + 2(1 - 3^n)y_0 + 2^nz_0 \end{array} \right.}$$

Correction de l'exercice 4.2 (Diagonalisation) *On considère la matrice :*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$
et on recherche des vecteurs $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *tels que* $AV = \lambda V$ *pour un certain scalaire* λ.

1. *Transformer l'équation* $AV = \lambda V$ *en un système paramétrique, de paramètre* λ.